湖南省普通高中学业水平考试要点解读

数　学

湖南省普通高中学业水平考试大纲编审组编写

二〇〇九年二月

前　　言

依据《2009年湖南省普通高中学业水平考试大纲》（以下简称《考纲》），我们编写了《2009年湖南省普通高中学业水平考试要点解读》（以下简称《解读》），作为与《考纲》配套使用的学业水平考试复习辅导用书。《解读》秉着“构建学科知识要点、解读要点知识内涵、点拨学习方法、激发学习兴趣、树立考试信心、促进全面发展”的理念，为实现回归基础教育本源，推动新的质量评价体系建设，促进新课程改革，服务学生发挥重要作用。

《解读》按照学科必修学分模块的篇章顺序，以“学习目标、要点解读、学法指导、梯度练习、模块检测”五个板块构成，体例新颖、层次分明、适用性强。它依据《考纲》提出学习目标，明确能力层次要求，以增强学生学习的目的性；通过对学科主干知识进行全面归纳、梳理、构建，解读要点知识内涵，强调了知识点之间的内在联系及知识与方法的迁移应用，突出在剖析典型案例中提炼学法，并进行恰到好处的“点”、“拨”，给出学习指导；注重帮助学生拓展思维空间，提高学习能力。同时，还精心设计了难易适度且呈梯度分布的习题和检测题，以满足学生学习能力要求的层次性和学习水平的差异性，有利增强学生的考试信心，促使学生快乐学习、从容应考。

由于编写时间仓促，书中如有不足之处，敬请广大师生提出宝贵意见。

2009年湖南省普通高中学业水平考试大纲编审组

二〇〇九年二月

目录

数学 1：

第一章　集合与函数概念

★学习目标

节　次	学　习　目　标
集合	知道集合的含义，了解集合之间的包含与相等的含义，知道全集与空集的含义，理解两个集合的并集与交集的含义及运算，理解补集的含义及求法，理解用Venn图表示集合的关系及运算.
函数及其表示	知道映射的概念，了解函数的概念，理解求简单函数的定义域和值域，理解函数的表示法，了解简单的分段函数及应用.
函数的基本性质	理解函数的单调性、最大（小）值及其几何意义，理解奇偶性的含义，利用函数的图象理解和探究函数的性质.

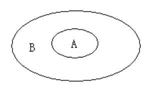
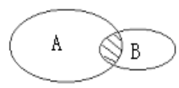
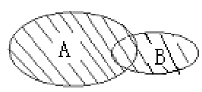
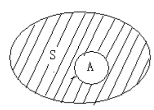
★要点解读

本章主干知识：集合、子集、并集、交集、补集，函数的概念及表示法，函数的定义域和值域，函数的单调性、奇偶性和最值.

1．集合

集合是指定的某些对象的全体.集合中元素的特性有：确定性（集合中的元素应该是确定的，不能模棱两可）、互异性（集合中的元素应该是互不相同的）、无序性（集合中元素的排列是无序的）.元素和集合的关系是属于不属于关系.表示集合的方法要掌握字母表示法、列举法、描述法及 Venn 图法.根据元素个数的多少集合可分为：有限集，无限集.

2．集合间的基本关系及基本运算

关系或运算	自然语言	符号语言	图形语言
$A\subseteq B$ $(或B\supseteq A)$	集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素.	$A\subseteq B(或B\supseteq A)\Leftrightarrow(x\in A\Rightarrow x\in B)$	
A∩B	由所有属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素所组成的集合	$A\cap B=\{x\mid x\in A,且x\in B\}$	
A∪B	由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合.	$A\bigcup B=\{x\mid x\in A,或x\in B\}$	
$C_U A$	已知全集 U，集合 A⊆U，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫作 A 相对于 U 的补集.	$C_U A=\{x\mid x\in U,且x\notin A\}$.	

3．函数及其表示

（1）函数的概念：设 A、B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 f(x)和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到

集合 B 的一个函数.
（2）函数的三要素是：定义域、值域和对应关系.
（3）函数的表示：解析法、列表法、图象法.
4．函数的基本性质
（1）函数的最值：函数最大（小）首先应该是某一个函数值，即存在 $x_0 \in I$，使得 $f(x_0)=M$；

函数最大（小）应该是所有函数值中最大（小）的，即对于任意的 $x \in I$，都有 $f(x) \le M$ ($f(x) \ge m$).

（2）函数的单调性：如果对于定义域 I 内的某个区间 D 内的任意两个自变量 x1，x2，当 x1<x2 时，都有 f(x1)<（>）f(x2)，那么就说 f(x)在区间 D 上是增（减）函数，函数的单调性是在定义域内的某个区间上的性质，是函数的局部性质.
（3）函数的奇偶性是函数的整体性质，函数具有奇偶性的一个必要条件是定义域关于原点对称．偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.
5．要注意区分一些容易混淆的符号
（1）$\in$ 与 $\subseteq$ 的区别：$\in$ 表示元素与集合之间的关系；$\subseteq$ 表示集合与集合之间的关系.
（2）a 与{a}的区别：a 表示一个元素，{a}而表示只有一个元素 a 的集合.
（3）{0}与 Φ 的区别：是含有一个元素 0 的集合，Φ 是不含任何元素的集合，因此 Φ $\subseteq$ {0}但不能写成 Φ={0}，Φ $\in$ {0}.
★学法指导
1．弄清元素的特征，从元素的分析上寻找解题的突破口
【方法点拨】集合中的元素具有“三性”：确定性、互异性和无序性，集合的关系、集合的运算等都是从元素的角度予以定义的.因此，求解集合问题时，应抓住元素的特征进行分析.

【案例剖析】已知 A＝{x| x≤ $3\sqrt{2}$,x∈R}，a= $\sqrt{15}$, b= $\sqrt{19}$, 则（　）

（A）a∈A 且 b∉A　（B）a∉A 且 b∈A
（C）a∈A 且 b∈A　（D）a∉A 且 b∉A

【解析】由于 $\sqrt{15} < 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$,所以 a∈A，

又 $\sqrt{19} > 3\sqrt{2} = \sqrt{18}$，所以 b∉A，故选 A.

【点评】：本题属于“知道”层次，能准确识别或再认集合中的元素；这类集合问题，元素的确定性是解决问题的入手点.
2．准确理解集合的相关概念，从集合的相关概念上寻找解题的突破口
【方法点拨】概念抽象、符号术语多是集合单元的一个显著特点，交集、并集、补集的概念及子集、真子集、集合相等的定义等等.准确理解这些概念是求解集合问题的依据和突破口.

【案例剖析】　已知 $A \subseteq B, A \subseteq C, B=\{1,2,3,5\}, C=\{0,2,4,8\}$, 则$A$可以为（　）

A．{1, 2}　B．{2, 4}　C．{2}　D．{4}

【解析】：对于选项 A：{1, 2}⊄C，选项 B：{2, 4}⊄B，选项 D：{4}⊄B，只有 C 符合要求，故选 C.

【点评】：（1）本题属于“了解”层次，考查考生的辨别、比较能力；（2）本题解答的关键是分析选项的元素特征，把握集合与集合的关系，运用子集的定义来直接判断.
3、正确掌握集合运算的内涵，从集合运算的转化上寻找解题的突破口

【方法点拨】明确 A∩B=B、A∪B=B、A∩B≠ϕ与 A∩B=ϕ的含义，根据问题的需要，可以转化为等价的关系式：$B\subseteq A$、$A\subseteq B$、A、B 有公共元素与 A、B 没有公共元素

【案例剖析】设 A={－4，0}，B=$\{x|(x+a)(x+4)=0\}$，

（1）若 A∪B=B，求 a 的值；

（2）若 A∩B≠ϕ，求 a 的取值范围.

【解析】:（1）因为 A∪B=B，所以$A\subseteq B$，又 A={－4，0}，而 B 至多只有两个根，因此应有 A=B，故$a=0$.

（2）由于$-4\in B$，A∩B 至少含有元素－4，因此不论 a 取何值 A∩B≠ϕ，故$a\in R$.

【点评】:本题属于“理解”层次，解答这类问题的关键是集合运算关系的转化.

4．多角度审视函数概念，从函数的本质上寻找解题突破口

【方法点拨】体会用集合与对应的观点来理解函数概念，明确函数表达式可以是解析式，图象，也可以是表格，了解构成函数的三要素，会求简单函数的定义域和值域.

【案例剖析】求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{x-2}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$　（2）$f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x\le 1\\ \dfrac{1}{x-1}, & 1<x\le 4\end{cases}$

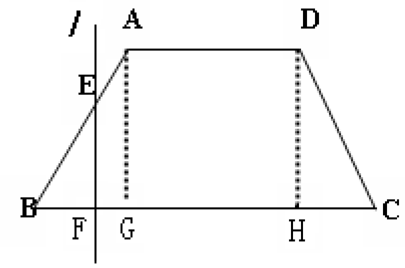
【解析】:（1）对于$\dfrac{x-2}{\ln x}$，要求$x>0$且$x\neq 1$，即$x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$；对于$\sqrt{16-x^2}$，要求$16-x^2\ge 0$，即$x^2\le 16$，它等价于$|x|\le 4$，即$x\in[-4,4]$，再取两个函数定义域的公共部分，得所求函数定义域为：$(0,1)\cup(1,4]$.

（2）两个分段区间是$(-1,1]$和$(1,4]$，取它们的并集得所求函数的定义域为$(-1,4]$.

【点评】:本题属于“理解”层次，考查考生对所学过的内容能进行理性分析；本题的第（1）问：函数是由$\dfrac{x-2}{\ln x}$与$\sqrt{16-x^2}$的和构成的，应先分别求出各表达式的定义域，再取公共部分；第（2）是个分段函数，先确定函数在各段上自变量的取值范围，再取并集.

5．正确画图、准确识图、合理利用图形建立函数关系

【方法点拨】一方面，通过画图、识图、用图可以研究函数的解析式及其性质；另一方面，函数的解析式及其性质可以通过图象反映出来.



【案例剖析】如图，已知底角为45°的等腰梯形$ABCD$，底边BC长为 7cm,腰长为$2\sqrt{2}cm$，当一条垂直于底边BC（垂足为F）的直线l从左至右移动（与梯形$ABCD$有公共点）时，直线l把梯形分成两部分，

令 $BF=x$，试写出左边部分的面积 y 与 x 的函数.

【解析】：过点 A,D 分别作 $AG\perp BC$， $DH\perp BC$，垂足分别是 G， H. 因为 $ABCD$ 是等腰梯形，底角为 45°，$AB=2\sqrt{2}cm$，所以 $BG=AG=DH=HC=2cm$，又 $BC=7cm$，所以 $AD=GH=3cm$.

⑴当点 F 在 BG 上时，即 $x\in(0,2]$时， $y=\frac{1}{2}x^2$；

⑵当点 F 在 GH 上时，即 $x\in(2,5]$时， $y=2+(x-2)\bullet 2=2x-2$

⑶当点 F 在 HC 上时，即 $x\in(5,7]$时，

$$y=S_{五边形ABFED}=S_{梯形ABCD}-S_{Rt\Delta CEF}=10-\frac{1}{2}(7-x)^2.$$

所以，函数解析式为 $$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & x\in(0,2],\\ 2x-2, & x\in(2,5],\\ -\frac{1}{2}(x-7)^2+10, & x\in(5,7]\end{cases}$$

【点评】：本题属于“理解”中简单应用层次，考查考生能运用所学过的知识分析生产实践中的数学问题；本题解题的关键是就直线 l 所在的位置分类讨论左边部分的图形特征，然后根据图形形状求出面积.

6．以函数问题为主线，探究和发现数学规律

【方法点拨】数学规律的探索，既要会观察分析已有规律，又要不断发现和完善规律.

【案例剖析】探究函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ 的最小值, 并确定取得最小值时 x 的值. 列表如下:

x	…	0.5	1	1.5	1.7	1.9	2	2.1	2.2	2.3	3	4	5	7	…
y	…	8.5	5	4.17	4.05	4.005	4	4.005	4.02	4.04	4.3	5	5.8	7.57	…

请观察表中 y 值随 x 值变化的特点, 完成以下的问题.

（1）根据上表分析函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ （$x>0$）在何区间上单调递增；当 x 为何值时？y 有最小值.

（2）证明：函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ （$x>0$）在区间（0, 2）上递减.

（3）思考：函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ （$x<0$）有最值吗？如果有, 那么它是最大值还是最小值？此时 x 为何值？（直接回答结果, 不需证明）

【解析】（1）函数 $f(x)=x+\frac{4}{x}$ （$x>0$）在区间（2, +∞）上递增.

当 $x=2$ 时, $y_{最小}=4$.

（2）任取 $x_1, x_2\in(0,\ 2)$ 且 $x_1<x_2$ 于是,

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\frac{4}{x_1})-(x_2+\frac{4}{x_2})=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-4)}{x_1x_2} \quad ①$$

∵ x_1，$x_2 \in$（0，2） 且 $x_1 < x_2$　　∴ $x_1 - x_2 < 0$；$x_1x_2 - 4 < 0$； $x_1x_2 > 0$

∴①式>0　即 f（x_1）－f（x_2）>0，f（x_1）>f（x_2）

∴f（x）在区间（0，2）递减.

（3）f（x）在（－∞，0）∪（0，∞）为奇函数.图象关于原点对称.

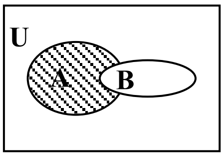
故当 x=－2 时,有最大值－4.

【点评】：（1）本题属于“理解”中简单应用层次，主要考查考生能运用所学知识进行简单探究的能力；（2）本题解题的关键是合理分析已给的各种数据，并由此发现和探究函数性质.

★阶梯练习：

A 级

1．已知全集 $U=\{-1,0,1,2,3,4\}$，$A=\{-1,0,2,4\}$，则 $C_uA=$（　）



A. ϕ　　B. $\{0,2,4\}$　　C. $\{1,3\}$　　D. $\{-1,1,3\}$

2．图中阴影部分表示的集合是（　　）

A. $A\bigcap(C_UB)$　　B. $(C_UA)\bigcap B$　C. $C_U(A\bigcap B)$　　D. $C_U(A\bigcap B)$

3．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 的定义域为（　　）

A.［1，2）∪（2，+∞）　　B.（1，+∞）　　C.［1，2）　D.［1，+∞）

4．函数 $f(x)=\begin{cases}2x & ,x\geq 0\\ x(x+1) & ,x<0\end{cases}$，则 $f(-2)=$（　　）

A. 1　　B．2　　C. 3　　D. 4

5．下列五个关系式①{0}=ϕ　②ϕ=0　③$\phi \subsetneqq \{\phi\}$　④$0\in\phi$　⑤$\{0\}\supseteq\phi$

其中正确的是________________

6. 函数 $y=e^{\frac{1}{x-1}}\cdot\lg(2-x)$ 的定义域是______________；

7．已知全集 U=R，集合 $A=\{x\,|-1\leq x<3\}, B=\{x\,|\,2<x\leq 5\}$，求：

（1）$A\bigcap B, A\bigcup B$　　　（2）$(C_UA)\bigcap B$，$A\bigcap(C_UB)$

8．已知 A＝{x | x^2－8x＋15＝0}，B＝{x | ax－1＝0}，且 B⊆A，求实数 a 组成的集合.

B 级

9．函数 $y=\dfrac{4}{x-2}$ 在区间 $[3,6]$ 上的最小值是（　　）

A． 1　　　　　B. 3　　　　　C. －2　　　　　D. 5

10．下列说法错误的是（　　）

A. $y=x^4+x^2$ 是偶函数　　　B. 偶函数的图象关于 y 轴成轴对称

C. $y=x^3+x^2$ 是奇函数　　　D. 奇函数的图象关于原点成中心对称

11．已知函数 $f(x)=x^2+2x+a$ 在区间 $\left[-3,2\right]$ 上的最大值是 4，则 a =__________.

12．已知函数 $f\left(x\right)=-x^2+2x$.

（1）证明 $f\left(x\right)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数;（2）当 $x\in\left[-5,2\right]$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的最大值和最小值.

13. 某厂准备投资 100 万生产 A,B 两种新产品，据测算，投产后的年收益，A 产品是总投入的 $\frac{1}{5}$，B 产品则是总投入开平方后的 2 倍．问应该怎样分配投入数，使两种产品的年总收益最大？

C 级

14．若函数 $f(2x+1)=x^2-2x$，则 $f(3)$ =______________.

15．已知 $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+1}(a,b,c\in Z)$ 是奇函数，又 f(1)=2，f(2)<3, 求 a,b,c 的值

★学习目标

节　次	学　习　目　标
指数函数	了解有理指数幂的含义、幂的运算.理解指数函数的概念、图象及其意义、指数函数的单调性与特殊点，了解指数函数模型的应用.
对数函数	理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；了解对数函数的概念、图象、单调性与特殊点，知道指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)$ 互为反函数.
幂函数	了解幂函数的概念；结合函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=1/x$, $y=x^{1/2}$ 的图像，了解它们的变化情况.

★要点解读

本章主干知识：指数的概念与运算，指数函数、图象及其性质，对数的概念与运算，对数函数、图象及其性质，幂函数的概念.

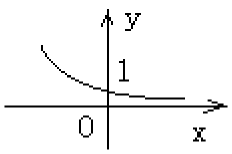
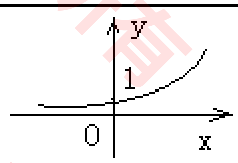
1．指数函数：

（1）有理指数幂的含义及其运算性质：

①$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$；②$(a^r)^s=a^{rs}$；③$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r,s\in Q)$.

（2）函数 $y=a^x(a>0且a\neq 1)$ 叫做指数函数.

指数函数的图象和性质

$y=a^x$		$0<a<1$	$a>1$
图　象			
性质	定义域	R	
	值域	$(0,+\infty)$	
	定点	过定点（0，1），即 $x=0$ 时，$y=1$ （1）$a>1$，当 $x>0$ 时，$y>1$；当 $x<0$ 时，$0<y<1$. （2）$0<a<1$，当 $x>0$ 时，$0<y<1$；当 $x<0$ 时，$y>1$.	
	单调性	在 R 上是减函数	在 R 上是增函数
	对称性	$y=a^x$ 和 $y=a^{-x}$ 关于 y 轴对称	

2．对数函数

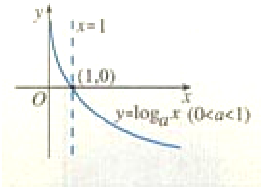
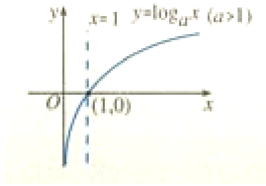
（1）对数的运算性质：如果 $a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，那么：

①$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$；　②$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

③$\log_a M^n=n\log_a M(n\in R)$.

（2）换底公式：$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}(a>0且a\neq 1,c>0且c\neq 1,b>0)$

(3)对数函数的图象和性质

$y=\log_a x$	$0<a<1$	$a>1$
图象		
定义域	$(0,+\infty)$	
值域	R	
性质	（1）过定点（1，0），即 $x=1$ 时，$y=0$	
	（2）在 R 上是减函数	（2）在 R 上是增函数
	（3）同正异负，即 $0<a<1$，$0<x<1$ 或 $a>1$，$x>1$ 时，$\log_a x>0$； $0<a<1$，$x>1$ 或 $a>1$，$0<x<1$ 时，$\log_a x<0$.	

3．幂函数

函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数（只考虑 $\alpha=1,2,3,-1,\dfrac{1}{2}$ 的图象）

★学法指导

1．弄清根式和分数指数幂的意义，掌握从指数转化上处理指数问题

【方法点拨】类比整数指数幂的运算性质理解分数指数幂的运算，根式一般先转化成分数指数幂，然后再利用有理指数幂的运算性质进行运算；

【案例剖析】化简下列各式（$a>0,b>0$）

(1) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}(a>0)$　　　(2) $(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})$

【解析】

$$(1)\ \frac{a^2}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}=\frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}=a^{2-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{a^5}$$

$$(2)(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}})=[2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}=4ab^0=4a;$$

【点评】：（1）本题属于“了解”层次，主要考查考生对有理指数幂的含义、幂的运算的识记了解情况；（2）解答这类问题的关键是先把根式转化成分数指数幂的最简形式，然后做幂的运算.

2．理解对数的概念及其运算性质，会利用对数运算性质化简、计算及求值

【方法点拨】一方面，要理解对数的概念和运算性质，理解对数式和指数式的互化，另一方面，计算、化简及求值首先寻找同底转化，当不同底时，要灵活运用换底公式处理.

【案例剖析】计算：

(1) $\lg14-2\lg\frac{7}{3}+\lg7-\lg18$　(2) $2\log_5 25+3\log_2 64$　(3) $\log_3 4\cdot\log_4 8\cdot\log_8\sqrt{3}$，.

【解析】：(1) $\lg14-2\lg\frac{7}{3}+\lg7-\lg18=\lg(2\times7)-2(\lg7-\lg3)+\lg7-\lg(3^2\times2)$

$=\lg2+\lg7-2\lg7+2\lg3+\lg7-2\lg3-\lg2=0$

(2) $2\log_5 25+3\log_2 64=2\log_5 5^2+3\log_2 2^6=2\times2+3\times6=22$

(3) $\log_3 4\cdot\log_4 8\cdot\log_8\sqrt{3}=\frac{\lg4}{\lg3}\cdot\frac{\lg8}{\lg4}\cdot\frac{\lg\sqrt{3}}{\lg8}=\frac{\lg4}{\lg3}\cdot\frac{\lg8}{\lg4}\cdot\frac{\frac{1}{2}\lg3}{\lg8}=\frac{1}{2}$

【点评】：(1) 本题属于“理解”层次，要理解对数运算的基本公式，熟练掌握化简求值的常见技能；(2) 注意式与式之间的联系，对数式要化到最简形式.

3．理解指（对）数函数的概念与性质，从函数表达式的特征上寻找解题途径.

【方法点拨】能根据指（对）数函数表达式有意义和单调性求定义域和值域. 解题时特别注意对数的真数大于零.

【案例剖析】求下列函数的定义域、值域：

(1) $y=8^{\frac{1}{2x-1}}$　(2) $y=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^x}$　(3) $y=\log_2(x^2-4x+6)$

【解析】：(1) $\because 2x-1\neq0$，$\therefore x\neq\frac{1}{2}$，原函数的定义域是$\{x|x\in R,x\neq\frac{1}{2}\}$，

令$t=\frac{1}{2x-1}$，则$t\neq0,t\in R$，

$\therefore y=8^t(t\in R,t\neq0)$得$y>0,y\neq1$，

所以，原函数的值域是：$\{y|y>0,y\neq1\}$.

(2) $\because 1-(\frac{1}{2})^x\geq0$　$\therefore x\geq0$　原函数的定义域是$[0,+\infty)$，

令$t=1-(\frac{1}{2})^x\ (x\geq0)$　则$0\leq t<1$，$\because y=\sqrt{t}$在$[0,1)$是增函数　$\therefore 0\leq y<1$，

所以，原函数的值域是$[0,1)$.

(3). 由于$x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$，$\therefore$函数定义域是R

$y=\log_2(x^2-4x+6)\geq\log_2 2=1$，故函数的值域是$\{y|y\geq1\}$

【点评】：(1) 本题属于“了解”层次，主要考查考生对函数定义域和值域掌握情况；(2) 求函数的定义域的主要依据是：分式的分母不等于零；偶次方根的被开方数不小于零；对数式的真数必须大于零；指数、对数式的底必须大于零且不等于 1. 求函数的值域的常用方法有：配方法、换元法、均值不等式法及单调性法等.

4．掌握指（对）数函数单调性的应用

【方法点拨】利用指（对）数函数的单调性可以比较函数值或自变量值的大小，求某些函数的值

或最值，解不等式.有些含字母参数的问题，要对参数范围进行讨论.

【案例剖析】已知 $f(x)=\log_a(a-a^x)$

（1）当 $0<a<1$ 时，求 $f(x)$ 的定义域；

（2）判断 $f(2)$ 是否大于零，并说明理由.

【解析】：（1）为使函数有意义，需满足 $a-a^x>0$，即 $a^x<a$，

∵$0<a<1$，∴$x>1$，故定义域为（1，+∞）.

（2）∵$f(2)=\log_a(a-a^2)$，$\log_a 1=0$，

又 $1-(a-a^2)=a^2-a+1=(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，

∴$(a-a^2)<1$，

当 $0<a<1$ 时，$f(2)>0$

当 $a>0$ 时，$f(2)<0$.

【点评】：本题主要考查对数函数的单调性，解题时，指（对）数函数的底数对单调性的影响要了解透彻.

5．掌握有关指（对）数函数奇偶性的判定

【方法点拨】对于和指（对）数函数有关的函数的奇偶性的判定，首先看函数定义域是否关于原点对称，然后寻找 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系，并由此判断函数的奇偶性.

【案例剖析】判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x\cdot\frac{a^x+1}{a^x-1}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）　　（2）$f(x)=\lg(\frac{2}{1+x}-1)$

【解析】：（1）f(x)定义域为：$\{x|x\in R且x\neq0\}$，

∵$f(-x)=-x\cdot\frac{a^{-x}+1}{a^{-x}-1}=-x\cdot\frac{1+a^x}{1-a^x}=x\cdot\frac{a^x+1}{a^x-1}=f(x)$，　故 f(x)为偶函数.

（2）$f(x)=\lg(\frac{2}{1+x}-1)=\lg\frac{2-1-x}{1+x}=\lg\frac{1-x}{1+x}$

∵$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg(\frac{1-x}{1+x})^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$

∴$f(x)$ 是奇函数，

【点评】：判定和指（对）数函数有关的函数的奇偶性，关键是由 $f(-x)$ 的解析式向目标 $f(x)$ 的解析式转化，解题要明确目标和方向.

★阶梯练习

A 级

1．指数函数 $y=a^x$ 的图像经过点（2，16）则 a 的值是　　　　（　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．2　　D．4

2．下列函数是幂函数的是（　　）

A、$y=2x^2$　　B、$y=x^3+x$　　C、$y=3^x$　　D、$y=x^{\frac{1}{2}}$

3．计算$\frac{1}{2}\log_3 12-\log_3 2=$（　　）

A. $\sqrt{3}$　B. $2\sqrt{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. 3

4．在区间$(0,+\infty)$上不是增函数的是　　　　　　　　　　　　（　　）

A. $y=2^x$　　　B. $y=\log_{\sqrt{2}}x$　　　C. $y=\frac{2}{x}$　　　D. $y=2x^2+x+1$

5．函数$f(x)=\frac{2x}{\log_2(x-2)}$的定义域是______________.

6．若 lg2＝a，lg3＝b，则 $\log_5 12$＝________.

7．计算：$(\sqrt[3]{2}\times\sqrt{3})^6+(\sqrt{2\sqrt{2}})^{\frac{4}{3}}-4(\frac{16}{49})^{-\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{2}\times 8^{0.25}-(-2005)^0$

8．设函数$f(x)=\begin{cases}2^{-x} & x<1\\ \log_4 x & x>1\end{cases}$，求满足$f(x)=\frac{1}{4}$的 x 的值.

B 级

9．方程$\lg x+\lg(x-3)=1$的解为　　　　　　（　　）

A、5 或-2　　　　B、5　　　　C、-2　　　　D、无解

10．已知函数$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\log_3 x,(x>0)\\ 2^x,(x\le 0)\end{cases}$,则$f[f(\frac{1}{9})]$的值为______________

11．函数$y=(2-a)^x$在定义域内是减函数，则a的取值范围是____________

12．已知$f(x)=2^x$，$g(x)$是一次函数，并且点$(2,2)$在函数$f[g(x)]$的图象上，点$(2,5)$在函数$g[f(x)]$的图象上，求$g(x)$的解析式.

13．画出函数$y=|3^x-1|$的图象，并利用图象回答：k为何值时，方程$|3^X-1|=k$无解？有一解？有两解？

C 级

14．函数$f(x)=a^x+\log_a(x+1)$在$[0,1]$上的最大值与最小值之和为a，则a的值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　　B. $\frac{1}{2}$　　　C. 2　　　D. 4

15．已知定义域为R的函数$f(x)=\dfrac{-2^{x}+b}{2^{x+1}+2}$是奇函数.

（Ⅰ）求b的值；（Ⅱ）判断函数$f\left(x\right)$的单调性；

（Ⅲ）若对任意的$t\in R$，不等式$f(t^{2}-2t)+f(2t^{2}-k)<0$恒成立，求$k$的取值范围.

第三章 函数的应用

★学习目标

节　次	学　习　目　标
函数与方程	知道函数的零点与方程根的联系，理解用二分法求方程的近似解
函数的模型及其应用	理解常见的函数模型及其应用

★要点解读

本章主干知识是：零点与方程根，用二分法求方程的近似解，函数的模型及其应用

1．函数与方程

（1）方程的根与函数的零点：如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根．

（2）二分法：二分法主要应用在求函数的变号零点当中，牢记二分法的基本计算步骤，即基本思路为：任取两点 x_1 和 x_2，判断（x_1，x_2）区间内有无一个实根，如果 f（x_1）和 f（x_2）符号相反，说明（x_1，x_2）之间有一个实根，取（x_1，x_2）的中点 x，检查 f（x）与 f（x_1）是否同符号，如果不同号，说明实根在（x，x_1）区间，这样就已经将寻找根的范围减少了一半了．然后用同样的办法再进一步缩小范围，直到区间相当小为止．

2．函数的模型及其应用

（1）几类不同增长的函数模型

利用计算工具，比较指数函数、对数函数以及幂函数增长差异；结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义．

(2) 函数模型及其应用

建立函数模型解决实际问题的一般步骤：①收集数据；②画散点图，选择函数模型；③待定系数法求函数模型；④检验是否符合实际，如果不符合实际，则改用其它函数模型，重复②至④步；如果符合实际，则可用这个函数模型来解释或解决实际问题．

解函数实际应用问题的关键：耐心读题，理解题意，分析题中所包含的数量关系（包括等量关系和不等关系）．

★学法指导

1．函数零点的求法

【方法点拨】对于一些比较简单的方程，我们可以通过因式分解、公式等方法求函数的零点，对于不能用公式解决的方程，我们可以把这些方程 $f(x)=0$ 与函数 $y=f(x)$ 联系起来，并利用函数的图象和性质找出零点，从而求出方程的根．

【案例剖析】求函数 $y=x^3-2x^2-x+2$ 的零点．

【解析】：对求简单的三次函数的零点：一般原则是进行分解因式，再转化为求方程的根将零点求出．$y=x^3-2x^2-x+2=(x-2)(x-1)(x+1)$，令 $y=0$ 可求得已知函数的零点

为－1、1、2.

【点评】：本题主要考查考生对函数零点概念的理解，函数零点与方程的关系.

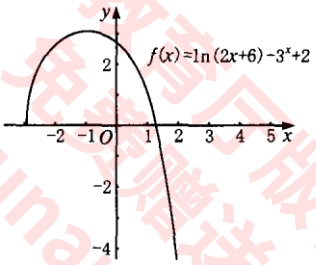
2．二分法求方程近似解

【方法点拨】对于在区间$[a，b]$上连续不断，且满足$f(a)\cdot f(b)<0$的函数$y=f(x)$，通过不断地把函数$f(x)$的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值.

【案例剖析】借助计算器或计算机，用二分法求方程$\ln(2x+6)+2=3^x$在区间（1，2）内的近似解（精确到0.1）.

【解析】：原方程即$\ln(2x+6)-3^x+2=0$，令$f(x)=\ln(2x+6)-3^x+2$，用计算器或计算机作出函数x、$f(x)$的对应值表（如下表）和图象（如下图）.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2.5820	3.0530	2.7918	1.0794	-4.6974



观察图或上表可知$f(1)\cdot f(2)<0$，说明这个函数在区间（1，2）内有零点x_0.

取区间（1，2）的中点$x_1=1.5$，用计算器可得$f(1.5)\approx-1.00$. 因为$f(1)\cdot f(1.5)<0$，所以$x_0\in(1,1.5)$.

再取(1，1.5)的中点$x_2=1.25$，用计算器可算得$f(1.25)\approx0.20$. 因为$f(1.25)\cdot f(1.5)<0$，所以$x_0\in(1.25,1.5)$.

同理，可得$x_0\in(1.25,1.375)$，$x_0\in(1.25,1.3125)$.

由于|1.3125-1.25|＝0.0625＜0.1，此时区间$(1.25,1.3125)$的两个端点精确到0.1的近似值都是1.3，所以原方程精确到0.1的近似值为1.3.

【点评】：一般地，对于不能用公式法求根的方程 $f(x)=0$ 来说，我们用二分法求出方程的近似解.

3．利用给定函数模型解决实际问题

【方法点拨】这类问题是指在问题中明确了函数关系式，我们需要根据函数关系式来处理实际问

题，有时关系式中带有需确定的参数，这些参数需要根据问题的内容或性质来确定之后，才能使问题本身获解.

【案例剖析】有甲乙两种产品，生产这两种产品所能获得的利润依次是 P 和 Q 万元，它们与投入资金 x（万元）的关系为：$P=\dfrac{3-x^2}{4}$，$Q=\dfrac{3}{4}(-x+3)$，今投入 3 万元资金生产甲、乙两种产品，为获得最大利润，对甲、乙两种产品的资金投入分别应为多少？最大利润是多少？

【解析】： 设投入甲产品资金为 x 万元（$0\le x\le 3$），投入乙产品资金为(3－x)万元，总利润为 y 万元．则

$$y=P+Q=\frac{1}{4}(3-x^2)+\frac{3}{4}x=-\frac{1}{4}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{21}{16},$$

当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$y_{\max}=\dfrac{21}{16}$

答：对甲、乙产品各投资为 1.5 万元，获最大利润为 $\dfrac{21}{16}$ 万元.

【点评】：本题是给定函数求二次函数最值的应用问题，解答这类的问题关键是通过配方求二次函数的最值.

4．建立确定的函数模型解决实际问题

【方法点拨】通过观察图表，判断问题适用的函数模型，借助计算器或计算机对数据进行处理，利用待定系数法得出具体的函数解析式，再利用得到的函数模型解决相应的问题.

【案例剖析】2008 年 5 月 12 日，四川汶川地区发生里氏 8.0 级特大地震．在随后的几天中，地震专家对汶川地区发生的余震进行了监测，记录的部分数据如下表：

强度（J）	1.6×10^{19}	3.2×10^{19}	4.5×10^{19}	6.4×10^{19}
震级（里氏）	5.0	5.2	5.3	5.4

注：地震强度是指地震时释放的能量

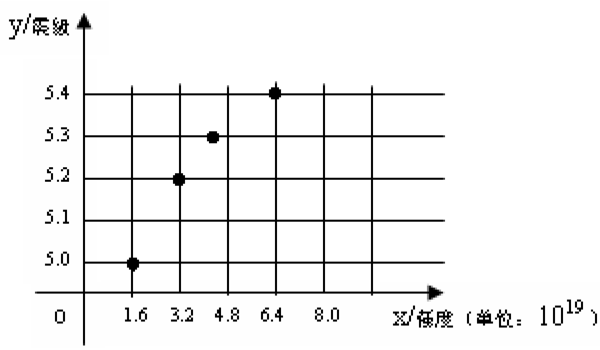
(1)画出震级（y）随地震强度（x）变化的散点图；

(2)根据散点图，从下列函数中选取选取一个函数描述震级（y）随地震强度（x）变化关系：

$y=kx+b,\ y=a\lg x+b$，$y=a\cdot 10^x+b$

(3)四川汶川地区发生里氏 8.0 级特大地震时释放的能量是多少？（取 $\lg 2=0.3$）

【解析】：(1) 散点图如下图：



（2）根据散点图，宜选择函数 $y=a\lg x+b$.

（3）根据已知，得 $\begin{cases}5.0=a\lg(1.6\times10^{19})+b\\5.2=a\lg(3.2\times10^{19})+b\end{cases}$ 解得：$a=0.7,b=-7.8$

$\therefore y=0.7\lg x-7.8$

当 $y=8.0$ 时， $x\approx10^{24}$（J）

【点评】：函数模型的选择一方面要分析题中的实际意义，另一方面，要考虑函数的本身特点.

★阶梯练习

A 级

1．函数 f(x)=2x+7 的零点为　　　　　　　　（　　）

A、7　　　B、$\frac{7}{2}$　　　C、$-\frac{7}{2}$　　　D、-7

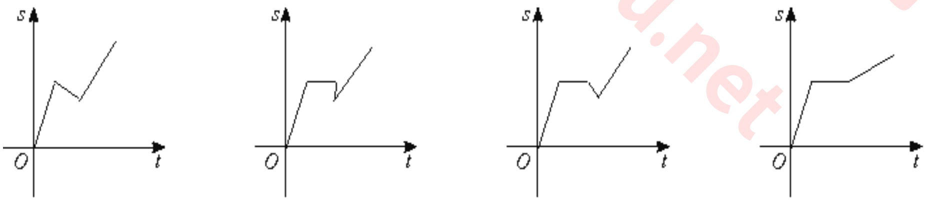
2．方程 $x-\frac{1}{x}=0$ 的一个实数解的存在区间为　　　　（　　　）

A、(0，1)　　　B、(0.5，1.5)　　　C、(-2，1)　　　D、(2，3)

3．设 $f(x)=3^x+3x-8$，用二分法求方程 $3^x+3x-8=0$ 在 $x\in(1,2)$ 内近似解的过程中得 $f(1)<0,f(1.5)>0,f(1.25)<0$，则方程的根落在区间（　）

A．$(1,1.25)$　　B．$(1.25,1.5)$　　C．$(1.5,2)$　　D．不能确定

4.某人骑自行车沿直线匀速旅行，先前进了 a 千米，休息了一段时间，又沿原路返回 b 千米（$b<a$），再前进 c 千米，则此人离起点的距离 s 与时间 t 的关系示意图是（　）



A　　　　B　　　　C　　　　D

5．方程 $x^2+x-1=0$ 的实数解的个数为________________.

6．某轮船在航行中每小时所耗去的燃料费与该船航行速度的立方成正比，且比例系数为 a，其余费用与船的航行速度无关，约为每小时 b 元，若该船以速度 v 千米/时航行，航行每千米耗去的总费用为　y　（元），则 y 与 v 的函数解析式为________.

7．已知函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的，有如下的 x，$f(x)$ 对应值表：

x	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	−3.51	1.02	2.37	1.56	−0.38	1.23	2.77	3.45	4.89

函数 $f(x)$ 在哪几个区间内有零点？为什么？

8.一个体户有一种货，如果月初售出可获利 100 元，再将本利都存入银行，已知银行月息为 2.4%，如果月末售出可获利 120 元，但要付保管费 5 元，问这种货是月初售出好，还是月末售出好？

B 级

9．函数 $f(x)=x^2-3x+2$ 在区间（1，2）内的函数值为（　　）

A、大于等于 0　　B、等于 0　　C、大于 0　　D、小于 0

10．有一块长为 20 厘米，宽为 12 厘米的矩形铁皮，将其四个角各截去一个边长为 x 的小正方形，然后折成一个无盖的盒子．则盒子的容积 V 与 x 的函数关系式是________．

11．老师今年用 7200 元买一台笔记本．电子技术的飞速发展，计算机成本不断降低，每隔一年计算机的价格降低三分之一．三年后老师这台笔记本还值__________

12．证明：函数 $f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2+1}$ 在区间（2，3）上至少有一个零点．

13．有一片树林现有木材储蓄量为 7100 cm^3，要力争使木材储蓄量 20 年后翻两番，即达到 28400 cm^3．（1）求平均每年木材储蓄量的增长率．（2）如果平均每年增长率为 8%，几年可以翻两番？

C 级

14．若方程 $a^x-x-a=0$ 有两个实数解，则 a 的取值范围是（　　）

A． $(1,+\infty)$　　B． $(0,1)$　　C． $(0,2)$　　D． $(0,+\infty)$

15．某工厂今年 1 月、2 月、3 月生产某种产品的数量分别是 1 万件、1.2 万件、1.3 万件，为了估测以后每个月的产量，以这三个月的产品数量为依据，用一个函数模拟该产品的月产量 y 与月份 x 的关系，模拟函数可以选用二次函数或函数 $y=a\cdot b^x+c$（其中 a,b,c 为常数）．已知 4 月份该产品的产量为 1.37 万件，　请问用以上哪个函数作为模拟函数较好，并说明理由．

数学 1 检测卷

本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分. 时量 120 分钟. 满分 100 分.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $A=\{1,2,3,\},B=\{2,3,4\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A、$\{1,2,3,4\}$　　B、$\{1,2,3\}$　　C、$\{2,3,4\}$　　D、$\{1,4\}$

2．下列计算正确的是　（　）

（A）$\log_2 6-\log_2 3=\log_2 3$　　（B）$\log_2 6-\log_2 3=1$

（C）$\log_3 9=3$　　（D）$\log_3\left(-4\right)^2=2\log_3\left(-4\right)$

3．下列函数在其定义域内为增函数的是　　（　）

A．$y=x^2-2x+3$　B．$y=2^x$　C．$y=\log_{\frac{1}{2}}x$　D．$y=x^{-1}$

4．函数 $y=\log_2 x,x\in(0,16]$ 的值域是（　　）

$A.(-\infty,-4]$　　$B.(-\infty,4]$　　$C.[-4,+\infty)$　　$D.[4,+\infty)$

5．已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-1=0\}$，则下列式子表示正确的有　　（　）

①$1\in A$　　②$\{-1\}\in A$　　③$\phi\subseteq A$　　④$\{1,-1\}\subseteq A$

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

6．已知 $f(x)$ 的图象恒过（1，1）点，则 $f(x-4)$ 的图象恒过（　）

A．（－3，1）　B．（5，1）　C．（1，－3）　D．（1，5）

7．以下四个命题中不正确的是（　　）

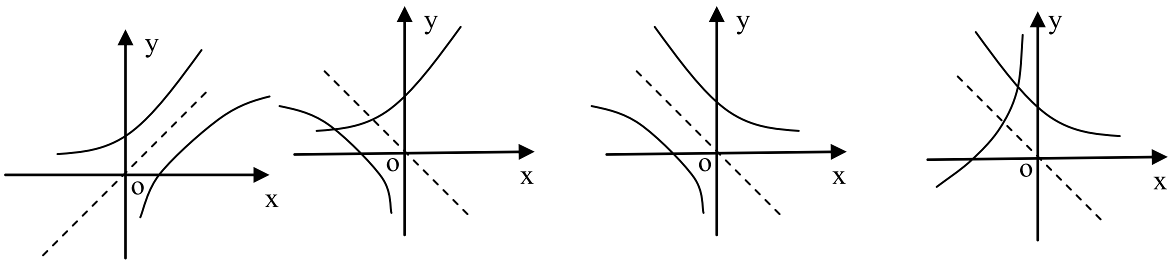
A．$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 是奇函数；　　B．$f(x)=x^2,x\in(-3,3]$ 是偶函数；

C．$f(x)=(x-3)^2$ 是非奇非偶函数；　　D．$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 是奇函数

8．四个数：2^3，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$，$\ln 3$，$\ln 2$ 中最小的是（　）

（A）2^3　　（B）$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4}$　　（C）$\ln 3$　　（D）$\ln 2$

9．已知 a>1，函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a(-x)$ 的图像可能是（　　）



A　　　　　　　　B　　　　　　　　C　　　　　　　　D

10．今有一组实验数据如下：

T	1.99	3.0	4.0	5.1	6.12
Y	1.5	4.04	7.5	12	18.01

现准备用下列函数中的一个近似地表示这些数据满足的规律，其中最接近的一个是：

A．$y=\log_2 t$　　B. $y=\log_{\frac{1}{2}} t$　　C. $y=\dfrac{t^2-1}{2}$　　D. $y=2t-2$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11． 式子 $\log_2{}^3\cdot\log_3{}^2$ 值是___________.

12． 若函数 $y=kx^2-4x+k-3$ 对一切实数 x 都有 $y<0$，则实数 k 的取值范围是_______.

13． 函数的 $f(x)=\ln x+x-2$ 零点个数为___________　.

14． 我国的人口约 13 亿，如果今后能将人口数平均增长率控制在 1%，那么经过 x 年后我国人口数为 y 亿，则 y 与 x 的关系式为_____.

15． 以下五个函数中：① $y=\dfrac{1}{x^2}$，② $y=2x^2$，③ $y=x^2+x$，④ $y=(1-x)^2$，⑤ $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，幂函数的是______________（填写符合的序号）

三、解答题：本大题共 5 小题，共 40 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16．（本小题满分 6 分）

设全集 U 为 R,已知 A={x|1<x<7},B={x|x<3 或 x>5},求（1）A⋃B　(2)A⋂B　(3)(C_UA)⋃(C_UB)

17．（本小题满分 8 分）

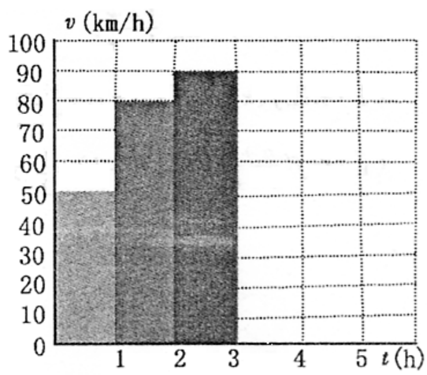
(1) 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x-2}+\log_3(x+3)$ 的定义域；

（2）计算：$\log_2(4^7\times 2^5)+\lg\sqrt[5]{100}+\log_2 3\bullet\log_3 4$

18．（本小题满分 8 分）一辆汽车在某段路程中的行驶速度与时间的关系如右图：

（1)求图中阴影部分的面积,并说明所求面积的实际意义；

（2）假设这辆汽车的里程表在汽车行驶这段路程前的读数为 2004km，试建立汽车行驶这段路程时汽车里程表读数 S 和时间 t 的函数解析式.



19.(本小题满分8分) 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$（a,b 为常数,且 $a\neq 0$）,满足 $f(2)=1,\ f(x)=x$ 有唯一解

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式　　　(2) $f[f(-3)]$ 的值.

20.（本小题满分 10 分）已知函数 $f(x)=a-\dfrac{1}{2^x+1}$.

（1）求证：不论 a 为何实数 $f(x)$ 总是为增函数；

（2）确定 a 的值，使 $f(x)$ 为奇函数；

（3）当 $f(x)$ 为奇函数时，求 $f(x)$ 的值域.

数学 2：

第一章　空间几何体

★学习目标

节次	学 习 目 标
空间几何体的结构、三视图和直观图	了解柱、锥、台、球及其简单组合体的结构特征，理解简单空间图形的三视图的画法及三视图的识别，理解斜二测法画空间图形的直观图,了解用平行投影与中心投影画空间图形的视图与直观图.
空间几何体的表面积和体积	了解柱、锥、台、球的表面积和体积的计算公式，会求简单组合体的表面积和体积.

★要点解读

本章主干知识　常见几何体及其简单组合体的结构特征；平行投影、中心投影和几何体的视图、直观图，斜二测法，柱、锥、台、球的表面积和体积公式.

1．棱柱、棱锥、棱（圆）台的本质特征

⑴棱柱：①有两个互相平行的面（即底面平行且全等），②其余各面（即侧面）每相邻两个面的公共边都互相平行（即侧棱都平行且相等）.

⑵棱锥：①有一个面（即底面）是多边形，②其余各面（即侧面）是有一个公共顶点的三角形.

⑶棱台：①每条侧棱延长后交于同一点，②两底面是平行且相似的多边形.

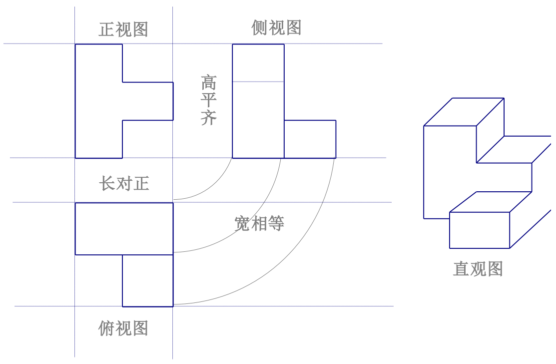
⑷圆台：①平行于底面的截面都是圆，②过轴的截面都是全等的等腰梯形，③母线长都相等，每条母线延长后都与轴交于同一点.

2．中心投影、平行投影及空间几何体的三视图、直观图

⑴一点发出的光照射下形成的投影叫中心投影.

⑵平行光线照射下形成的投影叫平行投影，投影线正对着投影面时，叫正投影，否则叫斜投影.

⑶平行投影下的正投影包括斜二测法和三视图.三视图的正视图、左视图、俯视图分别是从物体的正前方、正左方、正上方看到的物体轮廓线即正投影（被遮挡的轮廓线要画虚线）.



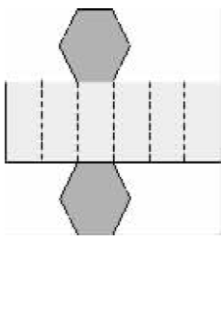
3．棱柱、棱锥、棱台的展开图与表面积

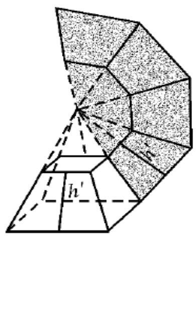
直棱柱、正棱锥、正棱台的侧面展开图分别是

若干个小矩形拼成的一个大矩形，

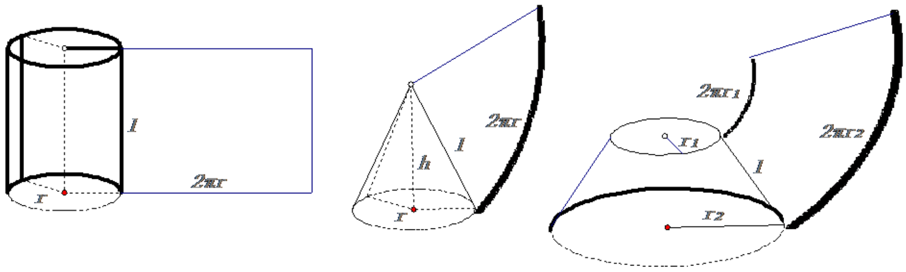
若干个全等的等腰三角形，

若干个全等的等腰梯形





4．圆柱、圆锥、圆台的展开图、表面积和体积的计算公式



(1) $S_{圆锥表}=\pi r(r+l)$ ← $S_{圆台表}=\pi(r_{上}^2+r_{下}^2+r_{上}l+r_{下}l)$ → $S_{圆柱表}=2\pi r(r+l)$

$r_{上}=0$　　　　　　　　　　　　$r_{上}=r_{下}$

(2) $V_{圆锥}=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ ← $V_{圆台}=\dfrac{1}{3}\pi(r_{上}^2+r_{下}^2+r_{上}r_{下})h$ → $V_{圆柱}=\pi r^2 h$

(3) 球面无法展开铺平,用无限逼近法得： $S_{球}=4\pi R^2$ ， $V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

★学法指导

1、抓几何体的本质特征

【方法点拨】从掌握柱、锥、台、球的本质结构特征入手进行分析，才能作出正确判断.

【案例剖析】下列命题中正确命题的个数（　　）

⑴有两个面平行，其余各个面都是平面四边形的几何体叫棱柱

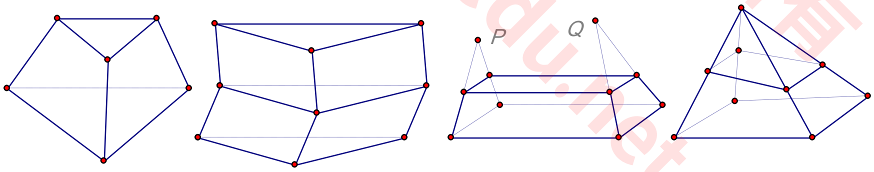
⑵有两个面平行，其余各个面都是平行四边形的几何体叫棱柱

⑶有两个面平行，其余各个面都是梯形的几何体叫棱台

⑷用一个平面去截棱锥，棱锥的底面和截面之间的部分叫棱台

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

【解析】由以下图象可知⑴⑵⑶⑷均不正确,故选 D 答案.



【点评】：本题属于“知道”层次，考查识别几何体，要从本质特征入手.

2．正确认识三视图，寻找斜高和高是计算出单个几何体表面面积与体积的关键

【方法点拨】正确地转换三视图与直观图，找出棱长与斜高、高的位置及长度关系是关键.

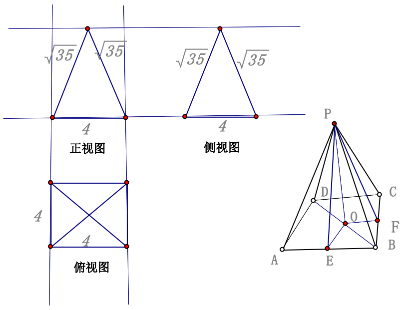
【案例剖析】 一个几何体的三视图如图所示，尺寸单位：cm ，试画出该几何体的直观图，并求出其侧面积和体积.

【解析】：由三视图得该几何体的直观图如右下图，是一个正四棱锥.

底面正方形边长 AB=4

斜高 PE=PF=$\sqrt{35}$

∴高 PO=$\sqrt{PE^2-OE^2}=\sqrt{35-4}=\sqrt{31}$



∴侧面积 S=4×$\frac{1}{2}$×4×$\sqrt{35}$=8$\sqrt{35}$（cm^2）

体积 V=$\frac{1}{3}$×4^2×$\sqrt{31}$=$\frac{16}{3}$$\sqrt{31}$（$cm^3$）

【点评】：本题属于“综合运用”层次，要防止将视图中的$\sqrt{35}$看作侧棱 PA、PB 的长.

3. 组合体的表面积及体积

【方法点拨】计算组合体的表面积和体积时，⑴分析清楚由哪几个几何体构成，⑵是否空心：内外表面积及体积的加减问题，⑶内外接与切的问题，⑷多个球的组合，先以各个球心连成多面体进行考察，再转化.

【案例剖析】如图 1，直角梯形 ABCD 中，∠A=∠B=90°AD∥BC，AD=2，AB=3，BC=6，把直角梯形 ABCD 绕底边 AD 旋转一周得到一个旋转体，求：⑴旋转体的表面积，⑵旋转体的体积.

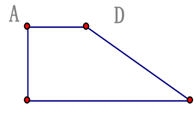


图1

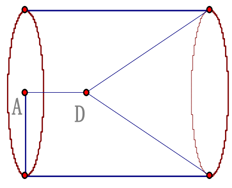


图2

【解析】：⑴如图 2，旋转体的表面积有内外部分，

S 表＝π×3^2＋2π×3×6＋π×3×5

＝60π（平方单位）

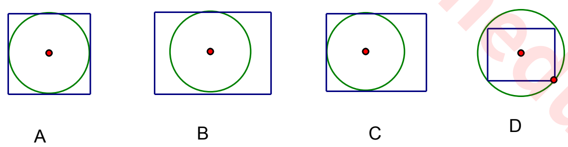
⑵旋转体的体积 V＝π×3^2×6－$\frac{1}{3}$π×3^2×4＝42π（立方单位）

【点评】：本题属于“综合运用”层次，依题意画出旋转体，分清内外空心部分即可.

★阶梯练习

A 级

1. 一个正方体内有一个内切球，作出正方体的对角面，所得截面图形是（　）

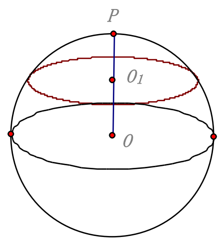


2．不共线的四点可以确定平面的个数可能为（　）

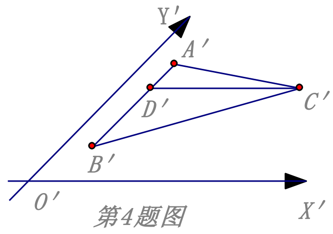
A． 1 或 2 个　　B． 2 或 3 个　　C． 3 或 4 个　　D． 1 或 4 个

3. 如图， 过球的一条半径 OP 的中点 O_1，作垂直于该半径的平面，所得截面圆的面积与球的表面面积之比为（　）

A. 3：16　　B. 9：16　　C. 3：8　　D. 9：32



第3题图



第4题图

4. 右上图，水平放置的三角形的直观图，D′是 A′B′边上的一点且 D′A′=$\frac{1}{3}$A′B′，A′B′∥Y′轴，C′D′∥X′轴，那么 C′A′、C′B′、C′D′三条线段对应原图形中的线段 CA、CB、CD 中（　）

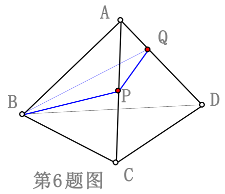
A．最长的是 CA，最短的是 CB　　　　　　B．最长的是 CB，最短的是 CA

C．最长的是 CB，最短的是 CD　　　　　　D．最长的是 CA，最短的是 CD

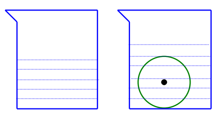
5．斜三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的底面是边长 AB=6 的正三角形，侧棱 $AA_1=10$，且侧棱 AA_1 与底面的两边 AB、AC 均成 60° 的夹角，则这个三棱柱的侧面面积等于（　　）

A．$90\sqrt{3}$　　　B．$60\sqrt{3}+60$　　　C．$45\sqrt{3}+60$　　　D．$120\sqrt{3}$

6. 如图，正四面体 ABCD 的棱长为 6，P、Q 分别是 AC 的中点、AD 的三分之一点，则截面 BPQ 分正四面体上下两部分的体积之比等于 ________



第6题图


第7题图

7. 如图，一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水.若放入一个半径为 r 的实心钢球，水面升高的高度为 $\frac{1}{9}$r，则 R：r 等于________

8．已知正三棱锥的底面边长为 a，高为 $\frac{1}{3}$a，则正三棱锥的侧面面积等于（用 a 的式子表示）

____

B 级

9． 若长方体的一条对角线与长、宽所成的角分别是45°、60°，且长方体的高为3，则该长方体的表面面积是　（　　）

A．　$18+36\sqrt{2}$　　B．　$18+36\sqrt{3}$　　C．　$36+36\sqrt{3}$　　D．　$9+36\sqrt{2}$

10．将边长为 a 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，使 $BD=a$，则三棱锥 $D—ABC$ 的体积为（　　）

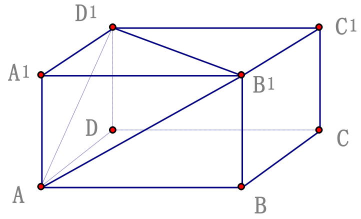
A．$\frac{a^3}{6}$　　　B．$\frac{a^3}{12}$　　　C．$\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$　　　D．$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

11．正四棱台上下底面面积分别为 16 和 81，有一平行于底面的截面面积为 36，则截面截得棱台的高上下两段的比为（　　）

A．1∶1　　　B．2∶1　　　C．2∶3　　　D．3∶4

12． 正六棱台的两底边长分别为 1cm，2cm，高是 1cm，它的侧面积等于________

13．长方体木头 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，$AB=BC=4$，$BB_1=3$，过 A、B_1、D_1 三点的平面将长方体切割去一个角，求剩下的几何体的表面积.



C 级

14．有一个几何体由 8 个面围成，每一个面都是正三角形，并且有四个顶点 A，B，C，D 在同一个平面内，ABCD 是边长为 30cm 的正方形.说明这个几何体的结构特征，画出其直观图和三视图，并求出它的表面积和体积.

15．已知一个圆锥的高为 6cm，母线长为 10cm.求：

⑴圆锥的体积； ⑵圆锥的内切球的体积； ⑶圆锥的外接球的表面积.

第二章　点、直线、平面之间的位置关系

★学习目标

节次	学 习 目 标
空间点、直线、平面间的位置关系	了解空间点、线、面的位置关系的四个公理和一个定理.
直线、平面平行的判定与性质	理解线线平行、线面平行、面面平行的判定与性质，运用已获得的结论证明一些空间位置关系的简单命题.
直线、平面垂直的判定与性质	理解线线垂直、线面垂直、面面垂直的判定与性质，运用已获得的结论证明一些空间位置关系的简单命题.
空间角、距离的概念和简单计算	理解空间角的概念，会进行简单计算.

★要点解读

本章主干知识　空间中点、直线、平面之间的位置关系，“线线、线面、面面的平行与垂直”的判定与性质，空间角的概念和简单计算.

1．平面

平面的性质：公理 1 的作用“直线在平面上的依据”、公理 2 的作用“确定一个平面的依据，用其证明点、线共面”、公理 3 的作用“判定两个平面相交的依据，用其证明点在直线上——两平面的公共点一定在交线上”.

2．空间两直线的位置关系和异面直线的概念与画法

空间中两条直线有三种位置关系：相交、平行、异面.

相交的两条直线与平行的两条直线都是共面的，异面直线“不同在任何一个平面内”的不共面性，指这两条直线永远不具备确定平面的条件，因此，常用平面衬托法画两条异面直线，图 1；

在两个平面内的两条直线可能是“相交直线、平行直线、异面直线”三种位置关系. 图 2

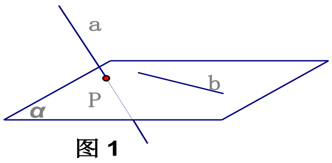


图 1

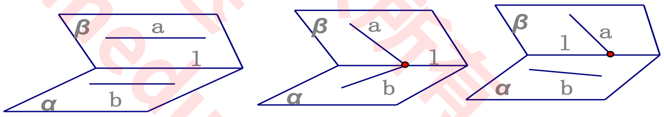


图 2

3．空间直线和平面的位置关系

直线与平面相交、直线在平面内、直线与平面平行

直线在平面外——直线和平面相交或平行，记作 $a\not\subset\alpha$ 包括 $a\cap\alpha=A$ 和 $a\parallel\alpha$

4．空间平面与平面的位置关系

⑴平面与平面平行、平面与平面相交

⑵如果平面$\alpha\parallel\beta\Rightarrow\alpha$ 内任意直线 $a\parallel\beta$，即面面平行$\Rightarrow$线面平行. 但任意直线 $a\subset\alpha$、$b\subset\beta$ 不都有 $a\parallel b$，即“面面平行$\Rightarrow$线线平行”是指平面α、β 与第三个平面γ 的两条交线平行

5．关于平行、垂直及异面直线所成的角

⑴定理“如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，则这两个角相等或互补”说明平移不改变角的大小，只改变角的顶点的位置. 所以求异面直线所成的角，要先平移找角，后求角.

⑵若直线 $a\parallel b$，$b\parallel c\implies a\parallel c$（公理 4）.

⑶垂直于同一个平面的所有直线（即平面的垂线）互相平行；

⑷垂直于同一条直线的所有平面（即直线的垂面）互相平行；

注意：

⑴若直线 $l\parallel$ 平面α，则 l 与α 内任意直线都平行吗？

只与α 内哪样的直线平行呢？　图 3

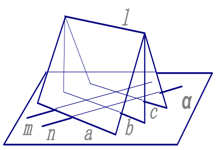


图3

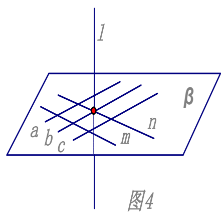


图4

⑵若直线 $l\perp$平面α，则 l 与α 内任意直线都垂直吗？

b 一定与α 内任意直线都垂直！图 4

★学法指导

1. 关于符号语言、文字语言和图形语言的转换，以及平面向空间的转换

【方法点拨】注意结合长方体中直线与平面的各种可能位置关系来考虑问题.

【案例剖析】已知直线 a、b 和平面α，下面推论错误的是（　　）

A. 若$\left.\begin{matrix} a\perp\alpha \\ b\subset\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a\perp b$　　B. 若$\left.\begin{matrix} a/\!/b \\ a\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow b\perp\alpha$

C. 若$\left.\begin{matrix} a\perp b \\ b\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/\alpha或a\subset\alpha$　　D. 若$\left.\begin{matrix} a/\!/\alpha \\ b\subset\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow a/\!/b$

【解析】结合长方体中的线面位置关系进行思辨，将符号语言转换成空间位置关系，答案选 D.

【点评】：本题属于“理解”层次，要能准确将符号语言转换得空间位置关系.

2. 截面问题

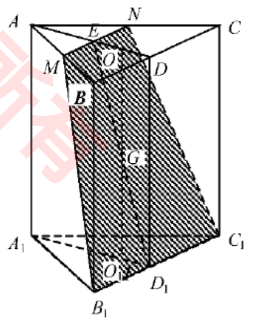
【方法点拨】截面是用平面将几何体完全切割开后所得的平面图形（顶点是切割面与棱的交点、边是切割面与表面的交线）. 先定形状——边是否平行（垂直），图是否对称，再计算边长（角度）等.

【案例剖析】已知正三棱柱的棱长都是a，过底面一边和上、下底面中心连线的中点作截面，求此截面的面积.

【解析】如图，∵上下底面平行　∴截面与上下底面的交线互相平行 即 $B_1C_1/\!/MN$

又正三棱柱有对称性 $\Longrightarrow$ $B_1M=C_1N$　∴经过B_1C_1和O_1O的中点G的截面B_1C_1NM是一个等腰梯形

∵OG是△EDD_1的中位线　∴$ED=2OD=2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$



∴等腰梯形B_1C_1NM的高$ED_1=\sqrt{ED^2+DD_1^{\,2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

又∵AE：AD=（$\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{3}a$）：$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{1}{3}$　∴ $MN=\frac{1}{3}BC=\frac{1}{3}a$

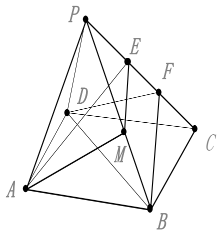
∴截面B_1C_1NM的面积$S=\frac{1}{2}$（$\frac{1}{3}a+a$）$\frac{2\sqrt{3}}{3}a=\frac{4\sqrt{3}}{9}a^2$

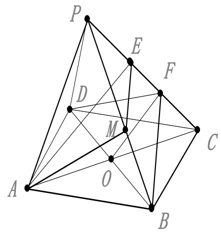
【点评】：本题属于“理解”层次，“先判断并论证截面图的形状，再计算”是解这类题的基本步骤.

3. 平行与垂直问题的相互转化及证明

【方法点拨】平行公理和“线线平行、线面平行、面面平行”的判定与性质是证明平行问题的主要依据；“线线垂直、线面垂直、面面垂直”的判定与性质是证明垂直问题的主要依据.

【案例剖析】如图，已知在四棱锥 P—ABCD 中，底面 ABCD 是平行四边形，点 E、F 在 PC 上，且 PE：EF：FC=1：1：1，问在 PB 上是否存在一点 M，使平面 AEM∥平面 BFD，并请说明理由.





【解析】要平面 AEM∥平面 BFD，先看能否找到一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面，由已知得 PE=EF=FC⇒E 是 PF 的中点，在 PB 上取 M 为 PB 的中点时可知 EM 就是△PBF 的中位线⇒EM∥FB (1) 又连接 AC 交 BD 于 O 点，∵ABCD 是平行四边形 ∴点 O 是 AC 的中点

∴OF 是△ACE 的中位线⇒OF∥AE (2)

而 EM、AE 是平面 AEM 内的两条相交直线，OF、FB 是平面 BFD 内的两条相交直线

由(1)(2)可得 EM∥平面 BFD，AE∥平面 BFD ∴ 平面 AEM∥平面 BFD，故存在点 M 就是 PB 的中点.

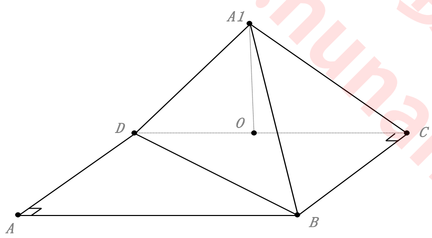
【点评】：本题属于“理解”层次，证明平行问题经常用到中位线的平行性、平行四边形对边平行等，然后采用“线线平行、线面平行、面面平行”进行相互转化与证明.

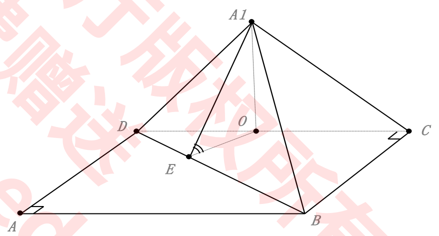
4. 求空间角和平面图形翻折成空间图形的问题

【方法点拨】三类空间角的几何求法：先一边作一边论证平行或垂直，作出角后指出某某角为所求的角，再连线成三角形计算求角.翻折问题：抓住折叠前与折叠后的图形中“长度和角度特别是直角”的不变量进行分析.

【案例剖析】如图，已知矩形 ABCD 中，AB=4a，BC=3a，沿对角线 BD 将 Rt△ABD 折起，使点 A 到 A_1 点，且 A_1 点在平面 BCD 上的射影刚好落在边 CD 上.

(1)求证：$BC\perp A_1D$，　(2)求证：平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1BD，(3)求二面角 A_1—BD—C 的正弦值.





【解析】(1)∵ ABCD 是矩形 ∴$BC\perp CD$ 　已知 A_1 点在平面 BCD 上的射影 O 刚好落在边 CD 上

即 $A_1O\perp$ 平面 BCD，而 BC⊂平面 BCD⇒ $A_1O\perp BC$

∴ BC 垂直于平面 A_1CD 内的两条相交直线 CD、A_1O ⇒ BC⊥平面 A_1CD⇒ $BC\perp A_1D$

(2)由上得 $A_1D\perp BC$ 又由已知得 $\angle BAD=\angle BA_1D=90°$ ⇒ $A_1D\perp A_1B$

∴A_1D 垂直于平面 A_1BC 内的两条相交直线 BC、A_1B ⇒ $A_1D\perp$ 平面 A_1BC

又 A_1D⊂平面 A_1 BD ⇒平面 $A_1BC\perp$ 平面 A_1BD

(3)过 O 作 OE⊥BD 于 E 点 连接 A_1E，∵$A_1O\perp$ 平面 BCD⇒$A_1O\perp BD$⇒BD⊥平面 A_1OE

⇒ $BD\perp A_1E$， ∴$\angle A_1EO$ 是二面角 A_1—BD—C 的平面角

∵在 Rt△BA_1D 中，$A_1E=\dfrac{12}{5}a$，在 Rt△CA_1D 中，$A_1O=\dfrac{CA_1\cdot DA_1}{CD}=\dfrac{3a\cdot\sqrt{7}a}{4a}=\dfrac{3\sqrt{7}}{4}a$

∴ 在 Rt△A_1EO 中，$\sin\angle A_1EO=\dfrac{A_1O}{A_1E}=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

【点评】：本题属于“综合运用”层次.线线角的关键是平行找角；线面角的关键是找射影时指出垂线的垂足落在哪个三角形的边上，才能去解对应的三角形；二面角的关键是作出平面角.

★阶梯练习

A 级

1．一条直线和平面所成角为θ，那么θ 的取值范围是（　　）

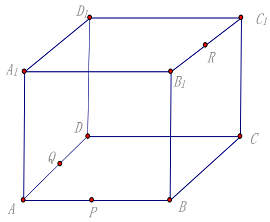
A、$[0^\circ，90^\circ]$　　B、$(0^\circ，90^\circ)$　　C、$[0^\circ，180^\circ]$　　D、$[0^\circ，180^\circ)$

2．若直线上有两个点在平面外，正确结论是（　）

A、直线在平面内　　B、直线在平面外

C、直线上所有点都在平面外　　D、直线与平面相交

3．如图，正方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，P、Q、R 分别是 AB、AD、B_1C_1 的中点，则正方体的过 P、Q、R 的截面图形的面积是　（　　）



A. $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

4．直线 l 与平面α内的两条直线都垂直，则直线 l 与平面α的位置关系是（　）

A、平行　　B、垂直　　C、在平面α内　　D、无法确定

5．不同直线 m,n 和不同平面 α,β，给出下列命题

① 若 $\left.\begin{matrix}\alpha // \beta\\ m\subset\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m//\beta$　　② 若 $\left.\begin{matrix}m//n\\ m//\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow n//\beta$

③ 若 $\left.\begin{matrix}m\subset\alpha\\ n\subset\beta\end{matrix}\right\}\Rightarrow m,n$异面　　④ 若 $\left.\begin{matrix}\alpha\perp\beta\\ m//\alpha\end{matrix}\right\}\Rightarrow m\perp\beta$

其中假命题有（　　）

A、0 个　　B、1 个　　C、2 个　　D、3 个

6．正方体 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则点 A 到△A_1BD 所在平面的距离=（　　）

A、1　　B、$\dfrac{1}{2}$　　C、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D、$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7．如果△ABC 的三个顶点到平面 α 的距离相等且不为零，那么△ABC 的（　　）

A、三边均与 α 平行　　B、三边中至少有一边与 α 平行

C、三边中至多有一边与 α 平行　　D、三边中至多有两边与 α 平行

8．正三棱锥中相对的两条棱所成的角=＿＿＿＿＿＿＿.

B 级

9．已知直线 a，如果直线 b 同时满足下列二个条件：

①直线 b 与 a 是异面直线；②b 与 a 所成的角为定值θ.

那么这样的直线 b 有（　　）

A、1 条　　B、2 条　　C、3 条　　D、无数条

10．已知 a 和 b 是两条异面直线，下列结论正确的是（　　）

A、过不在 a 、b 上的任意一点，可作一个平面与 a 、b 都平行

B、过不在 a 、b 上的任意一点，可作一条直线与 a 、b 都相交

C、过不在 a 、b 上的任意一点，可作一条直线与 a 、b 都平行

D、过 a 有且只有一个平面与 b 平行

11．已知一条与平面α相交的线段，长度为 10cm，两端点到平面α的距离分别是 2cm，3cm，这条线段与平面α所成角是______________.

12．空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点.

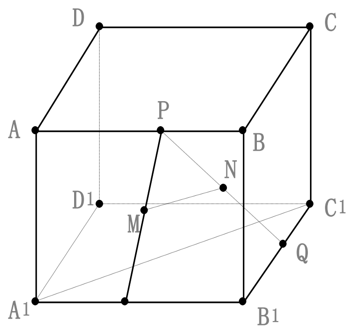
①若 AC=BD，则四边形 $EFGH$ 的形状是____________________；

②若 $AC\perp BD$， 则四边形 EFGH 的形状是________________.

13．过直线 l 外一点 A 作直线 l 的垂线有________条；过 A 点作直线 l 的垂面有_____个；过 A 点作直线 l 的平行线有_____条；过 A 点作直线 l 的平行平面有_______个.

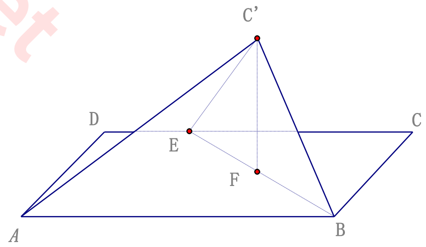
C 级

14．在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，如图，P 在 AB 上，Q 在 B_1C_1 上，且 $AP=B_1Q$，N 是 PQ 的中点，M 是正方形 ABB_1A_1 的中心．求证：(1)MN∥平面 B_1D_1；(2)MN∥A_1C_1.



15．已知矩形 ABCD 的边长 AB＝6cm，BC＝4cm，在 CD 上截取 CE＝4cm，以 BE 为棱将矩形折起，使△BC′E 的高 C′F⊥平面 ABED，求：

(1)点 C′ 到平面 ABED 的距离；(2)二面角 C′—AB—C 的正切值；(3)点 C′ 到边 AD 的距离.



第三章　　直线与方程

★学习目标

节次	学 习 目 标
直线的倾斜角及斜率，两直线平行与垂直的判定与性质	了解直线的倾斜角及斜率的概念，理解过两点的直线的斜率公式，会判断两直线的平行与垂直.
直线方程	理解直线方程的三种形式，两直线交点坐标的求法.
两点间的距离公式、点到直线的距离公式、两平行线间的距离	理解两点间的距离公式、点到直线的距离公式、两平行线间的距离.

★要点解读

本章主干知识　直线的倾斜角和斜率，过两点的直线的斜率公式．直线方程，两条直线位置关系及平行与垂直的判定.两点间距离公式，点到直线的距离公式，两条平行线间的距离.

1. 直线的倾斜角和直线的斜率

⑴坐标平面内的直线都有倾斜角，且一条直线的倾斜角是唯一的，倾斜角的范围为[0°，180°)；

直线的斜率有存在和不存在两种：当直线的倾斜角θ ≠90°时，存在斜率 k＝tanθ，

当直线的倾斜角θ ＝90°时，不存在斜率.

⑵经过两个定点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的直线：

若 $x_1\neq x_2$，则直线 P_1P_2 的斜率存在，$k=\tan\theta=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

若 $x_1=x_2$，则直线 P_1P_2 的斜率不存在，其倾斜角为 90^0.

2．直线方程的适用范围

⑴一般式 Ax+By+C=0（A、B 不同时为 0）：对坐标平面内的任何直线都适用．

⑵点斜式 $Y-Y_0=k(X-X_0)$、斜截式 $Y=kX+b$ 不能表示无斜率（垂直于 x 轴）的直线.

⑶两点式 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ 不能表示平行或重合于两坐标轴的直线.

⑷截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 不能表示平行或重合于两坐标轴的直线及过原点的直线

3．两条直线“平行或垂直”的判定

直线 $l_1/\!/l_2$ 或重合 ⟺ 倾斜角 $\alpha_1=\alpha_2$ ⟺ 有斜率时 $k_1=k_2$，或都无斜率；

直线 $l_1/\!/l_2$ ⟺ 有斜率时 $k_1=k_2$ 且 y 轴上的截距不同，或都无斜率且 x 轴上的截距不同；

直线 $l_1\perp l_2$ ⟺ 有斜率时 $k_1\times k_2=-1$，或一条有斜率 $k_1=0$ 另一条无斜率.

若 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，　l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$　且若 A_1、A_2、B_1、B_2 都不为零.

①$l_1/\!/l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$；　②$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$；

③l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$；　④$l_1$ 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$；

4．对称问题及中点公式

(1)若两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 关于直线 *l*：y=kx+b 对称：

①P_1P_2中点在 *l* 上：$\dfrac{y_1+y_2}{2}=k\dfrac{x_1+x_2}{2}+b$ ， ②$P_1P_2\perp l$：$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times k=-1$

(2)若两点 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 关于点 $M(x_0, y_0)$ 对称：M 是 P_1P_2的中点（也叫中心）

$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ ， $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

5．**两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、$P_2(x_2, y_2)$ 的距离公式** $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

两点 $P_1(x_1, y_1)$ 、$P_2(x_2, y_2)$ 的中点坐标公式 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

6．**点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 Ax+By+C=0 的距离公式** $d_1=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$，

平行直线 $Ax+By+C_1=0$、$Ax+By+C_2=0$ 的距离公式 $d_2=\dfrac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

★学法指导

1．求直线的斜率和倾斜角的方法

【方法点拨】求斜率：①已知直线上两点，由 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 求出；②已知倾斜角θ ，由 k=tanθ 求出；③已知直线方程，将方程化成斜截式 y=kx+b，则 x 项的系数就是斜率 k. 也可能无斜率.

求倾斜角的方法：先求斜率 k，再由 k= tanθ 求出倾斜角θ . 要注意讨论，无斜率则θ =90° .

【案例剖析】在下列叙述中：

①一条直线的倾斜角为θ ， 则它的斜率 k= tanθ ；

②若直线的斜率 k=-1，则它倾斜角为 135° ；

③经过 A（-1，0），B（-1，3）两点的直线的倾斜角为 90° ；

④过点 P（2，-3）、倾斜角为 135° 的直线方程为 x-y-5=0；

⑤直线 y=1 的倾斜角为 45° .

以上所有正确命题的序号是__________

【解析】①当θ =90° 时无斜率 k，故错误； ②与③正确；④k=tan135° =-1，故错误；

⑤其实斜率 k=0，则倾斜角为 0° ，故错误. 答案：②③

【点评】：本题属于“理解”层次，会多途径求直线的斜率和倾斜角.

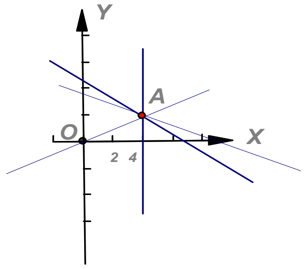
2.斜率、截距存在与否、为 0 与否等需要分类讨论

【方法点拨】依据条件设直线方程时，要注意讨论存在性，再依次求解.

【案例剖析】求经过两条直线 x+3y-10=0 和 x-2y=0 的交点，且到原点的距离为 4 的直线方程.

【解析】错解 由方程组$\begin{cases}x+3y-10=0\\x-2y=0\end{cases}$， 解得两直线交点的坐标为 A（4，2）

设所求直线方程为 y-2=k(x-4) 即 kx-y-4k+2=0



则原点到该直线的距离 d=$\dfrac{|k\cdot 0-0-4k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$=4

得（2k-1）^{2}=4(k^2+1)　　∴k=-$\dfrac{3}{4}$

∴所求直线方程为 y-2=-$\dfrac{3}{4}$(x-4)， 即 3x+4y-20=0.

正解一： 同上两条直线交点的坐标为 A（4，2）

当斜率存在时，设所求的直线方程为 y-2=k(x-4) 同上得直线方程为 3x+4y-20=0

当斜率不存在时，过交点 A（4，2）的直线方程为 x-4=0

∴所求直线方程为 3x+4y-20=0 和 x-4=0

正解二： 过两条直线交点的直线系方程可设为 x+3y-10 + m(x-2y)=0

即(1+m)x+(3-2m)y-10=0

则原点到该直线的距离 d=$\dfrac{|(1+m)\cdot 0+(3\text{-}2m)\cdot 0-10|}{\sqrt{(1+m)^2+(3\text{-}2m)^2}}$=4

去分母,两边平方,整理得 $4m^2$-8m+3=0　　∴m=$\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{3}{2}$

∴所求直线方程为 3x+4y-20=0 和 x-4=0

【点评】：本题属于“理解”层次，对直线的可能位置作出分析后需要分类讨论时，必须分情况考虑，防止漏解.

3、“数形结合”的思想

【方法点拨】数形结合就是把“数、式子”变形后和图形中的“角、斜率、距离”等相联系，使式子具有一定的几何意义，这样数形结合进行思辨往往更直观、更简捷.

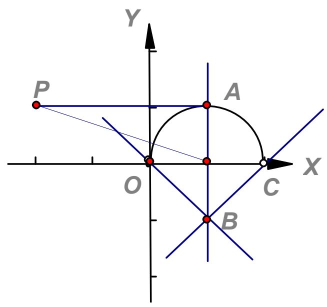
【案例析】已知实数 x、y 满足 y=$\sqrt{-x^2+2x}$ ，求：

(1)$\dfrac{y+1}{x-1}$的取值范围 ；　(2)$\sqrt{x^2+4x+y^2-2y+5}$的最大值和最小值.

【解析】(1)将实数 x、y 满足 y=$\sqrt{-x^2+2x}$ 变形为：（x-1）^{2}+y^2=1，且 0≤y≤1，可把（x、y）看作是上半圆上的动点 A ，且分式$\dfrac{y+1}{x-1}$可看作是两点 A（x、y)、B（1、-1）连线的斜率 k

如图，点 A 在半圆上移动时，可得$\dfrac{y+1}{x-1}$=k 的范围：-∞<k≤k_{BO} 或 k_{BC}≤k<+∞

即-∞<k≤-1 或 1 ≤k<+∞



∴$\dfrac{y+1}{x-1}$的取值范围为（-∞，-1]∪[1，+∞）

(2)∵$\sqrt{x^2+4x+y^2-2y+5}=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$ =｜AP｜

看作两点 A（x、y)、p(-2，1) 之间的距离

则最大距离为｜CP｜=$\sqrt{17}$， 最小距离为$\sqrt{10}$ -1

∴$\sqrt{x^2+4x+y^2-2y+5}$最大值为$\sqrt{17}$， 最小值为$\sqrt{10}$ -1.

【点评】：本题属于“综合应用”层次，抓住式子的几何意义进行转化，也是解代数问题的重要方法之一.

4. 两条直线平行和垂直的讨论

【方法点拨】当直线方程中的系数含有字母时，关于两条直线“平行与垂直”的讨论方法

方法一　分有斜率和无斜率两种情况进行讨论，见要点 3.

方法二　若无分式或分母不含字母系数，由直线方程的一般式直接求解：

直线 $l_1 \parallel l_2 \Longleftrightarrow A_1B_2-A_2B_1=0$，且 $A_1C_2-A_2C_1\neq 0$ ， 直线 $l_1\perp l_2 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$

【案例剖析】已知两条直线 l_1: $(m+3n-1)x+(m-1)y-2m+2=0$，l_2: $(m-3n+2)x+(m+1)y-m+1=0$，分别求下列条件下的 m，n 的值. ⑴直线 $l_1\perp l_2$ ，且直线 l_1经过点（0，-1）； ⑵直线 $l_1\parallel l_2$ ，且坐标原点到这两条直线的距离相等.

【解析】⑴∵直线方程中不含分母，直接得

直线 $l_1\perp l_2$即　$(m+3n-1)(m-3n+2)+(m-1)(m+1)=0$

且直线 l_1经过点（0，-1）得　$(m+3n-1)\times 0+(m-1)\times(-1)-2m+2=0$

∴ $m=1$ ， $n=1$　或　$m=1$ ， $n=0$

⑵直线 $l_1\parallel l_2$ 得 $(m+3n-1)(m+1)-(m-3n+2)(m-1)=0$　①

且 $(m+3n-1)(-m+1)-(m-3n+2)(-2m+2)\neq 0$　②

∵坐标原点到这两条直线的距离相等

当 $m=1$ 时 l_1无斜率，l_2有斜率；当 $m=-1$ 时 l_2无斜率，l_1有斜率，两直线不能平行；

当 $m\neq\pm 1$ 时 l_1、l_2有斜率 ， 又要平行，则 l_1、l_2 在 y 轴上的截距相反：

$-2=\dfrac{m-1}{m+1}$　得　$m=-\dfrac{1}{3}$　代入①得 $n=\dfrac{2}{3}$

又代入②检验知，$m=-\dfrac{1}{3}$，$n=\dfrac{2}{3}$　使②成立　∴ $m=-\dfrac{1}{3}$，$n=\dfrac{2}{3}$ 为所求.

【点评】：本题属于“理解”层次，判定两条直线的平行与垂直，主要是考虑两直线斜率的关系，但要讨论无斜率的情况，也有避免分情况讨论的，如方法二即是.

5. 对称的应用

【方法点拨】⑴在直线上求一点 P,使 P 到两定点的距离之和最小；⑵在直线上求一点 P,使 P 到两定点的距离之差最大；⑶光线反射问题.以上问题都要应用对称的知识来解.

【案例剖析】已知点 P 在直线 l:x-y=0 上，两点 A（-2，1），B（1，2），

⑴ 求使|PA|+|PB|取得最小值的点 P 的坐标；　⑵ 求使|PA|-|PB|取得最大值的点 P 的坐标

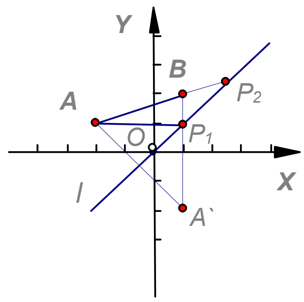
【解析】⑴如图，∵A、B 两点在直线 l 的同侧，点 A（-2，1）关于直线 l:x-y=0 对称的点 A′ 坐标为（1，-2），则连线 A′B 与直线 l:x-y=0 的交点 P_1（1，1）

由对称性知，直线 l:x-y=0 上的任意点 P 都有|PA|=|PA′|

由于三角形中两边之和大于第三边，如图可知，对称轴 l:x-y=0 上的任意点 P 都有

$|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|\geqslant|A'B|=4$

∴点 P 为 P_1（1，1）点时使|PA|+|PB|取得最小值 4.



⑵ 连接 AB 延长交直线 l 于点 P_2（$\frac{5}{2}$，$\frac{5}{2}$），

由于三角形中两边之差小于第三边，如图可知，

直线 l:x-y=0 上的任意点 P 都有 $|PA|-|PB|\leqslant|AB|=\sqrt{10}$

∴点 P 为 P_2（$\frac{5}{2}$，$\frac{5}{2}$）点时使|PA|-|PB|取得最大值 $\sqrt{10}$.

【点评】：本题属于“理解”层次，对称的应用很广泛，而求对称点是关键.

6. 求直线方程

【方法点拨】求直线方程的常见方法有：

⑴ 先找经过的点、截距、斜率，代入某种直线方程 ；

⑵ 或先设某种形式的方程（如点斜式、斜截式等），再由已知求系数——待定系数法.

【案例剖析】在直角三角形中，已知直角顶点 A（1，1），一条直角边所在直线的方程为 $x-y=0$，斜边的中点为 $D(4,2)$，求其它两边所在直线的方程.

【解析】∵已知一条直角边所在直线的方程为 $x-y=0$， ∴另一直角边斜率为-1，且经过直角顶点 A（1，1），得其所在的直线方程为 y-1=- (x-1)

⑴若斜边所在的直线无斜率，又已知斜边的中点为 $D(4,2)$，则其所在的直线方程为 x=4，

∴斜边所在直线的方程为 x=4，与两直角边所在直线的方程联立

得交点 B（4，4），C（4，-2），这时与已知点 $D(4,2)$ 是斜边 BC 的中点相矛盾！

⑵若斜边所在的直线有斜率，设斜边的直线方程为 $y-2=k(x-4)$，与两直角边的直线方程联立，

得交点即顶点：B($\frac{4k-2}{k-1}$，$\frac{4k-2}{k-1}$)，C($\frac{4k}{k+1}$，$\frac{2-2k}{k+1}$)

∵斜边 BC 中点为 $D(4,2)$，由中点公式得 $\frac{4k-2}{k-1}+\frac{4k}{k+1}=8$ 及 $\frac{4k-2}{k-1}+\frac{2-2k}{k+1}=4$ 解得 k=3

∴斜边所在的直线方程为 $y-2=3(x-4)$， 即 $3x-y-10=0$

∴其它两边即斜边的直线方程为 $3x-y-10=0$ 和另一直角边的直线方程为 x+y-2=0

【点评】：本题属于“理解”层次，先设某种形式的直线方程，再联立其它方程来求解，是解析法的一种重要手段.

★阶梯练习

A 级

1. 过点 P(2, 3)与 Q(1, 5)的直线 PQ 的倾斜角的正切值为（ ）

 A、2， B、-2， C、$\frac{1}{2}$， D、$-\frac{1}{2}$

2. 若直线 l_1：$ax+2y-1=0$ 与直线 l_2：$x+(a-1)y+a^2=0$ 平行，则 a=（ ）

 A、-1 B、2 C、-1 或 2 D、0 或 1

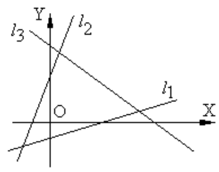
3. 若直线的斜率为-2，则其倾斜角的正弦值为（ ）

 A、$\frac{\sqrt{5}}{5}$ B、$\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C、$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D、$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 已知直线 l_1：3x＋4y=6 和 l_2：3x-4y=-6，则直线 l_1 和 l_2 的倾斜角的关系是（ ）

 A、互补 B、互余 C、相等 D、互为相反数

5. 如图，直线 l_1，l_2，l_3 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，则成立的是 （ ）



 A、$k_1<k_2<k_3$ B、$k_1<k_3<k_2$

 C、$k_3<k_2<k_1$ D、$k_3<k_1<k_2$

6. 经过点 P(x_0, y_0)且与直线 Ax+By+C=0 垂直的直线方程是（ ）

 A、$B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$ B、$B(x-x_0)-A(y-y_0)+C=0$

 C、$B(x+x_0)-A(y+y_0)=0$ D、$B(x+x_0)-A(y+y_0)+C=0$

7. k 是直线 l 的斜率，θ 是直线 l 的倾斜角，若 30°≤θ<120°，则 k 的取值范围是（ ）

 A、$-\sqrt{3}\leq k\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$ B、$\frac{\sqrt{3}}{3}\leq k\leq 1$ C、$k<-\sqrt{3}$ 或 $k\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$ D、$k\geq\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 若直线过点 P(0,2)，且在 x 轴上的截距是 2,则该直线的倾斜角是__________.

9. 已知直线 l_1 和 l_2 关于直线 y=x 对称，若直线 l_1 的斜率为 $\sqrt{3}$，则直线 l_2 的斜率为________，

倾斜角为_________.

B 级

10. 原点在直线l上的射影为点 P(－2，3),则直线l的方程是（　）

A、x＋2y=0　　　　B、2x＋3y＋13=0

C、x－2y＋5=0　　　　D、2x－3y＋13=0

11. 若点(4，a)到直线 4x-3y=1 的距离不大于 3，则 a 的取值范围是（　）

A、$\left[0，10\right]$　　B、(0，10)　　C、$\left[\frac{1}{3}，\frac{3}{13}\right]$　　D、(-∞，0]$\cup$[10，＋∞)

12. 已知三点 A（1，-1），B（4，P），C（P，0）共线，则 P=_________.

13. 若直线 l 的倾斜角是连接 P(3, －5), Q(0, －9)两点的直线的倾斜角的 2 倍，则直线 l 的斜率为___________.

C 级

14. 已知 M(2, －3), N(－3, －2)，直线 l 过点 P(1, 1)，且与线段 MN 相交，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是_________________.

15. 若两平行直线 $3x-2y-1=0$ 和 $6x+ay+c=0$ 之间的距离是$\frac{2\sqrt{13}}{13}$，求$\frac{c+2}{a}$的值.

第四章　圆与方程

★学习目标

节次	学 习 目 标
圆的方程	理解圆的标准方程和一般方程.
直线与圆、圆与圆的位置关系	理解直线与圆以及圆与圆的位置关系，直线和圆的方程的简单应用.
空间直角坐标系，两点间的距离公式	理解坐标法，知道空间直角坐标系的概念，用空间直角坐标系刻画点的位置，空间两点间的距离公式.

★要点解读

本章主干知识　圆的标准方程和一般方程，直线与圆、圆与圆的位置关系，直线和圆的方程的简单应用.坐标法和空间直角坐标系刻画点的位置，两点间的距离公式.

1. **确定圆的三要素：**圆心坐标 a、b 和半径 r；一般方程中 D、E、F 且 $D^2+E^2-4F>0$.

2. **直线与圆的位置关系的判定**　　圆心 $C(a,b)$ 到直线的距离——圆心距 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

(1)若 $d<r\Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow\Delta>0$　(2)若 $d=r\Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow\Delta=0$　(3)若 $d>r\Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow\Delta<0$

△法利用直线与圆的方程联立方程组 $\begin{cases}Ax+By+C=0\\x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\end{cases}$ 来判断和求解.

3. **经过一点 M（x_0，y_0）作圆（x-a）^{2}+（y-b）^{2}=r^2 的切线**

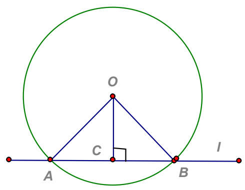
(1)点 M 在圆上时，切线方程为（x_0-a）（x-a）+（y_0-b）（y-b）= r^2

(2)点 M 在圆外时，有 2 条切线、2 个切点 P_1（x_1，y_1）、P_2（x_2，y_2），方程（x_0-a）（x-a）+（y_0-b）（y-b）= r^2 不是切线方程，而是经过 2 个切点 P_1（x_1，y_1）、P_2（x_2，y_2）的直线方程.

4. **直线被圆所截得的弦长公式**

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$（垂径分弦定理）

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$



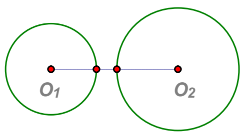
5. **圆与圆的位置关系**

设两个大小不等的圆的圆心分别为 O_1，O_2，半径分别为 r_1，r_2，圆心距 $|O_1O_2|$=d．则共有五种位置关系如下：

d＞r_1+r_2 $\Leftrightarrow$ 外离；　d= r_1+r_2　$\Leftrightarrow$ 外切；

$|r_1-r_2|$＜d＜r_1+r_2　$\Leftrightarrow$ 相交；　d=$|r_1-r_2|$ $\Leftrightarrow$ 内切；

0≤d＜$|r_1-r_2|$ $\Leftrightarrow$ 内含；



若大小相同的两个圆，则只有外离、外切、相交、重合四种位置关系.

6. 空间直角坐标系，两点之间的距离公式

(1) xoy 平面上的点的坐标的特征 A（x，y，0）：竖坐标 z=0

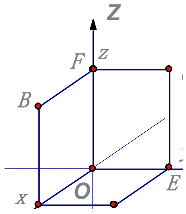
xoz 平面上的点的坐标的特征 B（x，0，z）：纵坐标 y=0

yoz 平面上的点的坐标的特征 C（0，y，z）：横坐标 x=0

x 轴上的点的坐标的特征 D（x，0，0）：纵、竖坐标 y=z=0

y 轴上的点的坐标的特征 E（0，y，0）：横、竖坐标 x=z=0

z 轴上的点的坐标的特征 E（0，0，z）：横、纵坐标 x=y=0



(2) $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

★学法指导

1. **求圆的方程**

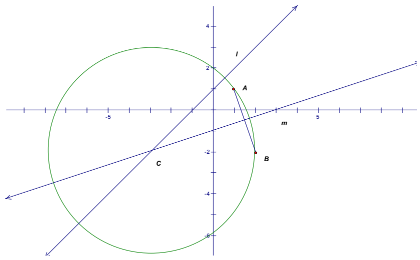
【方法点拨】三种方法求圆的方程：

⑴若圆过已知的两点或三点，可设圆的一般方程；⑵若与圆心、半径有关，可设圆的标准方程；⑶圆的直径式方程 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

【案例剖析】已知圆心为 C 的圆经过两点 A（1，1）和 B（2，-2），且圆心 C 在直线 l：$x-y+1=0$ 上，求圆 C 的方程.

【解析】方法一 ∵圆心 C 与 A、B 两点的距离相等，

则 C 在线段 AB 的垂直平分线 $y+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})$ 上



∵圆心 C 在直线 l：$x-y+1=0$ 上，

联立方程 $x-y+1=0$ 和 $y+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})$

得圆心 C（-3， -2）

则 半径 $r=|CA|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5$　∴ 所求圆的方程为 $(x+3)^2+(y+2)^2=25$

方法二∵圆过 A、B 两点，设圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ⇒ 圆心 C 的坐标为$(-\frac{D}{2}，-\frac{E}{2})$

由已知得 $\begin{cases}-\frac{D}{2}+\frac{E}{2}+1=0\\ D+E+F+2=0\\ 2D-2E+F+8=0\end{cases}$　∴D= 6 ，E= 4，F= -12

∴ 所求圆的方程为 $x^2+y^2+6x+4y-12=0$

【点评】：本题属于“理解”层次，设圆的方程用待定系数法求 a、b、r 或 D、E、F 是主要方法.

1. **关于圆的切线**

【方法点拨】判定直线与圆相切的方法：联立方程由△=0，或圆心距 d=r，或要点 3 的结论.

【案例剖析】经过点 P(2，1) 引圆 $x^2+y^2=4$ 的切线，求：⑴切线方程，⑵切线长.

【解析】⑴ ∵将点 P(2，1)代入圆方程右边得 $x^2+y^2=5>4$，∴点 P(2，1)在圆外，可引两条切线

设切线方程为 $y-1=k(x-2)$ 即：$kx-y-2k+1=0$

∵圆心(0, 0)到切线的距离是 2　∴ $\frac{|-2k+1|}{\sqrt{1+k^2}}=2$　　解得 $k=-\frac{3}{4}$

∴切线方程为 $-\frac{3}{4}x-y+\frac{3}{2}+1=0$　即：$3x+4y-10=0$

另一条切线方程为 x=2 （无斜率） ∴所求切线方程为 3x+4y－10=0 和 x=2

(2)切线长=$\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{2^2+1^2-2^2}=1$

【点评】：本题属于“理解”层次，圆外一点 P（x_0, y_0）向圆引的两条切线，切线长=$\sqrt{|PC|^2-r^2}$.

3. 关于直线与圆的位置关系及利用圆的性质求弦长和最值问题

【方法点拨】判定直线与圆的位置关系主要用“△法和圆心距 d—半径 r 法” 两种方法，另外，“直线经过圆内一点也是判定直线与圆相交”的一种重要方法.

【案例剖析】已知直线 l：kx-y-3k=0；圆 M：$x^2+y^2-8x-2y+9=0$， (1)求证：直线 l 与圆 M 必相交；(2)当圆 M 截直线 l 所得弦最长时，求 k 的值； (3)当圆 M 截直线 l 所得弦最短时，求 k 的值.

【解析】(1)证明：**方法一**∵圆的方程化为（x-4）^{2}+（y-1）^{2}=8 得 圆心 C(4,1) 半径 r=$2\sqrt{2}$

则圆心 C 到直线 l 的距离 d=$\dfrac{|4k-1-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\dfrac{k^2-2k+1}{k^2+1}}=\sqrt{1-\dfrac{2k}{k^2+1}}\le\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$＜r

(-2k≤k^2+1，2k≤k^2+1 恒成立，则 -1≤$\dfrac{2k}{k^2+1}$≤1 恒成立) ∴直线 l 与圆 M 必相交.

方法二∵直线方程化为 l：y=k(x-3)，对任意 k，可知直线 l 总过定点 P(3,0)，

把 P 点代入圆方程右边得（3-4）^{2}+（0-1）^{2}=2＜8，可知定点 P (3,0)在圆内

∴直线 l 与圆 M 必相交.

(2) ∵直线 l 过圆内定点 P (3,0)，要圆 M 截直线 l 所得弦最长，由弦长公式 |AB| =$2\sqrt{r^2-d^2}$ 知

半径 r=$2\sqrt{2}$ 为定值，当 d 最小时，弦长 |AB| 最长，

∴d=0 即直线 l 过圆心 C(4,1)，弦长 |AB| =2r ∴k=$\dfrac{1-0}{4-3}$=1

(3)∵直线 l 过圆内定点 P (3,0)，要圆 M 截直线 l 所得弦最短，由弦长公式 |AB| =$2\sqrt{r^2-d^2}$ 知

半径 r=$2\sqrt{2}$ 为定值，当 d 最大时，弦长 |AB| 最短，

∴d= |PC| =$\sqrt{2}$ 最大时，弦长 |AB| 最短=$2\sqrt{6}$，此时 PC⊥l，由(2)知 k_{PC}=1

∴k=-1 时，圆 M 截直线 l 所得弦最短.

【点评】：本题属于“理解”层次，掌握通性通法，利用圆的性质解出相关问题.

4. 圆与圆的位置关系、两个圆的公共弦所在的直线方程

【方法点拨】(1)判定圆与圆的位置关系主要用“联立方程组法和圆心距 d 法”两种方法，另外，“一个圆经过另一个圆内的一点也是判定两圆相交”的一种重要方法；

(2)两个相交圆 O_1: $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ ， O_2: $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的公共弦所在直线的方程是：（D_2-D_1）x +（E_2-E_1）y+F_2-F_1=0(由两圆的方程相减得到)

【案例剖析】已知两圆 O_1: $x^2+y^2+2x-4y-11=0$ ， O_2: $x^2+y^2-2x+2y+1=0$. (1)判定两圆的位置关系，(2)若相交,求公共弦长.

【解析】(1)将圆的方程化为$(x+1)^2+(y-2)^2=16$，$(x-1)^2+(y+1)^2=1$.则得圆心 O_1 (-1,2)，O_2 (1,-1)，

半径 r_1=4 ， r_2=1，圆心距$|O_1O_2|$ =$\sqrt{(1+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{13}$＜5 =4+1= r_1+ r_2 又$|O_1O_2|$ =$\sqrt{13}$

$>3=r_1-r_2$　∴两圆相交.

(2)由上知两圆相交 ∴两圆的方程相减得 2x-3y-6=0 就是两圆相交的公共弦所在直线的方程

方法一∵联立方程 2x-3y-6=0 和 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ 得交点的坐标

$$A\left(\frac{15+6\sqrt{3}}{13},\ \frac{-16+4\sqrt{3}}{13}\right),\ B\left(\frac{15-6\sqrt{3}}{13},\ \frac{-16-4\sqrt{3}}{13}\right)$$

$$\therefore 公共弦长|AB|=\sqrt{\left(\frac{12\sqrt{3}}{13}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{3}}{13}\right)^2}=\frac{4\sqrt{39}}{13}$$

方法二∵2x-3y-6=0 就是两圆相交的公共弦所在直线的方程

则圆心 O_2（1,-1）到公共弦所在直线的距离 $d=\dfrac{|2\times1-3\times(-1)-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$

$$\therefore 公共弦长|AB|=2\sqrt{r_2^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{13}}=\frac{4\sqrt{39}}{13}$$

【点评】：本题属于“理解”层次，用方程组或圆心距来判定两个圆的位置关系是两种重要方法.

5．求空间点的坐标

【方法点拨】找点的坐标的方法：(1)该点到 yoz 平面、zox 平面、xoy 平面的距离(找垂线段)及正负方向，(2)该点若为两已知点的中点，用中点公式求其坐标.

点 P（x，y，z）关于坐标平面 xoy 对称的点 P_1（x，y，-z）

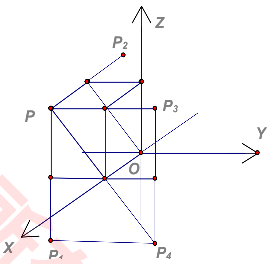
点 P（x，y，z）关于坐标平面 yoz 对称的点 P_2（-x，y，z）

点 P（x，y，z）关于坐标平面 zox 对称的点 P_3（x，-y，z）

点 P（x，y，z）关于 x 轴对称的点 P_4（x，-y，-z）

点 P（x，y，z）关于 y 轴对称的点 P_5（-x，y，-z）

点 P（x，y，z）关于 z 轴对称的点 P_6（-x，-y，z）



【案例剖析】　在正三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 中，已知 AB=a、C_1C=2a，E、F 分别为 AB、B_1C_1 的中点.

⑴建立空间直角坐标系，写出 A、B、C、A_1、B_1、C_1、E、F 各点的坐标.

⑵求出 EF 的距离.

【解析】方法一 图 1　(1)正三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$ 中，∵底面△ABC 是正三角形，侧棱 A_1A⊥底面

∴ 以 AB 的中点 E 点为坐标系的原点，取 A_1B_1 边的中点 D，则 ED⊥AB，EC⊥AB，分别以 EC、EB、ED 为 x 轴、y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系.则八个点的坐标分别是

E(0，0，0)，A$\left(0，-\frac{1}{2}a，0\right)$，B$\left(0，\frac{1}{2}a，0\right)$，C$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a，0，0\right)$，

$A_1\left(0，-\frac{1}{2}a，2a\right)$，$B_1\left(0，\frac{1}{2}a，2a\right)$，$C_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a，0，2a\right)$，F$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a，\frac{1}{4}a，2a\right)$

(2)EF 的距离$=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\left(\frac{1}{4}a\right)^2+(2a)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}a$

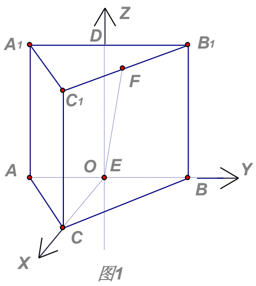


图1

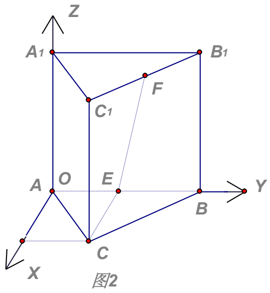


图2

方法二 图 2 ，以 A 点为坐标系的原点，分别以 AB、A A_1为 y 轴、z 轴，建立空间直角坐标系.

(1) 八个点的坐标分别是 A(0，0，0)，B(0，a，0)， C（$\frac{\sqrt{3}}{2}$a，$\frac{1}{2}$a，0)，A_1(0，0，2a)，

B_1（0，a，2a)， C_1（$\frac{\sqrt{3}}{2}$a，$\frac{1}{2}$a，2a)，E(0，$\frac{1}{2}$a，0)，F($\frac{\sqrt{3}}{4}$a，$\frac{3}{4}$a，2a)

(2) EF 的距离=$\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{4}a)^2+(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}a)^2+(2a)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$a

【点评】：本题属于“知道”层次，①建立空间直角坐标系——依据几何体的特征，寻找三条两两垂直的直线或二条垂直，再作第三条与它们都垂直，可比喻为找长方体房间的一个墙角.②“点的坐标 x、y、z”分别是点到 yoz 平面、zox 平面、xoy 平面的垂线段即“长、宽、高”.故可利用“等长、等宽、等高”来找对应点的坐标.

★阶梯练习

A 级

1、两圆 $x^2+y^2-4x+6y=0$ 和 $x^2+y^2-6x=0$ 的连心线方程是（ ）

A、x+y+3=0　　B、2x-y-5=0　　C、3x-y-9=0　　D、4x-3y+7=0

2、到原点的距离等于 4 的动点的轨迹方程是（ ）

A、$x^2+y^2=4$　　B、$x^2+y^2=16$

C、$x^2+y^2=2$　　D、$(x-4)^2+(y-4)^2=16$

3、以（1,1）和（2,-2）为一条直径的两个端点的圆的方程为（ ）

A、$x^2+y^2-3x+y-\frac{5}{2}=0$　　B、$x^2+y^2-3x+y=0$

C、$x^2+y^2+3x-y=0$　　D、$x^2+y^2-3x-y-\frac{5}{2}=0$

4、方程 $x^2+y^2+ax+2ay+2a^2+a-1=0$ 表示圆，则 a 的取值范围是（ ）

A、$a<-2$ 或 $a>\frac{2}{3}$　　B、$-\frac{2}{3}<a<2$　　C、$-2<a<\frac{2}{3}$　　D、$-2<a<0$

5、已知圆的方程是$(x-2)^2+(y-3)^2=4$，则点 P（1，2）满足(　)

A、是圆心　　B、在圆上　　C、在圆内　　D、在圆外

6、如果方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$ 所表示的曲线关于 y=x 对称，成立的是（ ）

A、D=E　　　　　B、D=F　　　　C、E=F　　　　D、D=E=F

7、如果直线 l 将圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 平分，且直线 l 不通过第四象限，那么直线 l 的斜率的取值范围是（　　）

A、[0，2]　　B、[0，1]　　　C、$[0,\frac{1}{2}]$　　　D、$[0,\frac{1}{3}]$

8、点 P（x_0，y_0，z_0）关于 y 轴的对称点的坐标为____________ .

B 级

9、若直线 x+y+m=0 与圆 $x^2+y^2=m$ 相切，则 m=（　　）

A、0 或 2　　B、2　　C、$\sqrt{2}$　　D、无解

10、方程 y=－$\sqrt{25-x^2}$ 表示的曲线是(　　)

A、一条射线　　　B、一个圆　　C、两条射线　　　D、半个圆

11、已知 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$，则 x^2+y^2 的最大值为(　　)

A、3+$\sqrt{5}$　　　　B、3-$\sqrt{5}$　　　C、$14-6\sqrt{5}$　　D、$14+6\sqrt{5}$

12、圆 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$，与直线 x+2y－5=0 相交于 P_1、P_2 两点，则 $|P_1P_2|$=________.

13、若方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示以（2，－4）为圆心，4 为半径的圆，则 F=_________

C 级

14、直线 L 过点(-5,-10)，且在圆 $x^2+y^2=25$ 上截得的弦长为 $5\sqrt{2}$，求直线 L 的方程.

15、已知方程 $x^2+y^2-2(t+3)x+2(1-4t^2)y+16t^4+9=0$ 表示一个圆.

⑴求 t 的取值范围；

⑵求该圆半径 r 的最大值及此时圆的标准方程

数学 2 检测卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

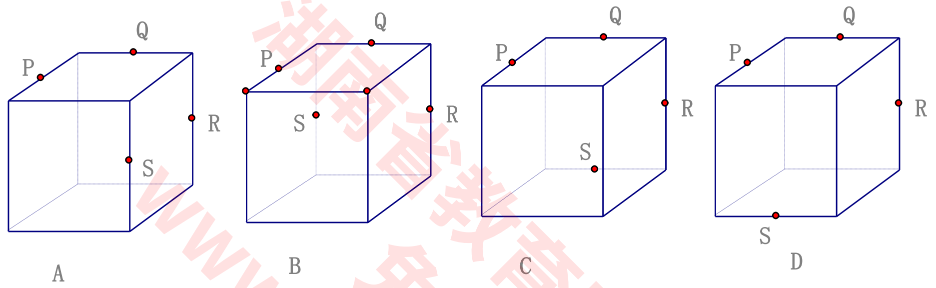
1．已知点 P(-2，3)，则点 P 关于原点对称的点的坐标（　）

A、(-2，-3)　　B、(2，3)　　C、(2，-3)　　D、(-3，2)

2．已知点 A（0，6），B（-8，0），原点到直线 AB 的距离=（　）

A. $\frac{24}{5}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{12}{5}$　　D. $\frac{4}{3}$

3．以下四个正方体中,P、Q、R、S 分别是所在棱的中点，则 P、Q、R、S 四点共面的图是（　）



4．已知直线 l 经过第一、二、四象限，倾斜角为θ，y 轴上截距为 b，则正确的是（　）

A. bsinθ ＜0　　B. bcosθ ＜0　　C. bsinθ ≤0　　D. bcosθ ≤0

5．直线 3x-2y=4 的斜截式方程是(　　)

A、y=$\frac{3}{2}$x-2　　B、y=$\frac{3}{2}$x+2　　C、$\frac{x}{\frac{4}{3}}-\frac{y}{2}=1$　　D、$\frac{x}{\frac{4}{3}}+\frac{y}{-2}=1$

6．空间中三个不同的平面把空间分成的区域可能有（　）个

A　4 或 6　　B　6 或 7　　C　7 或 8　　D　以上都有可能

7.在正四面体 P—ABC 中,D、E、F 分别是 AB、BC、CA 的中点，下面四个结论中不成立的是(　)

A. BC∥平面 PDF　　B. DF⊥平面 PAE

C. 平面 PDF⊥平面 ABC　　D. 平面 PAE⊥平面 ABC

8．若直线 kx-y=k-2 与直线 ky-x=k 的交点位于第二象限，则 k 的取值范围是（　）

A.　(-1,1)　　B.　(-∞,-1) ∪(1,+ ∞)

C.　(-1,0)　　D.　(-∞, 0) ∪(1,+ ∞)

9．关于直线 a、b 与平面α、β，有下列四个命题：

①若 a∥α，b∥β 且α∥β，则 a∥b　　②若 a⊥α，b⊥β 且α⊥β，则 a⊥b

③若 a⊥α，b∥β 且α∥β，则 a⊥b　　④若 a∥α，b⊥β 且α⊥β，则 a∥b

其中真命题的序号是(　　)

A、①②　　B、②③　　C、③④　　D、④①

10．光线从点 P（-3，3）射到 Y 轴上，经 Y 轴反射后经过点 Q（-1，-5），则光线从 P 到 Q 走过的路程为(　　)

A. 10　　B. 5+$\sqrt{17}$　　C. 4$\sqrt{5}$　　D. 2$\sqrt{17}$

二、填空题（每小题4分，共20分）

11. 用数学符号语言将“直线 l 既经过平面α 内的一点A，也经过平面α 外的一点B”记作________________________.

12. 已知空间直角坐标系中，A是x轴上的一点，点B（-1，1，0)，且 $|AB|=\sqrt{5}$，则点A的坐标是__________.

13. 给出下列四个命题：

① 过点 $M(-1,2)$ 的直线方程表示为 $y-2=k(x+1)$；

② 过点 $M(-1,2)$ 且在 x 轴、y 轴上截距相等的的直线方程是 $x+y-1=0$；

③ 过点 $M(-1,2)$ 且与直线 l: $Ax+By+C=0(AB\neq 0)$ 垂直的直线方程是 $B(x+1)-A(y-2)=0$；

④ 若点 $M(-1,2)$ 不在直线 l: $Ax+By+C=0(AB\neq 0)$ 上，则过点 M 且与 l 平行的直线方程是 $A(x+1)+B(y-2)=0$；

以上命题中，真命题的序号是__________.

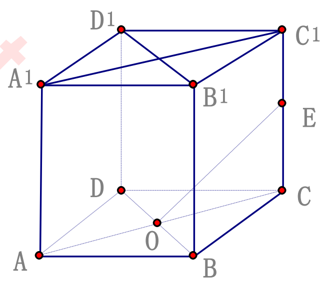
14. 已知实数x、y满足 $x^2+y^2=1$，则 $\dfrac{y+1}{x+\sqrt{3}}$ 的最大值为________，最小值为________.

15. 圆 $(x+1)^2+(y+1)^2=16$ 上的点到直线 $3x-4y-2=0$ 的距离的最大值为__________，最小值为________.

三、解答题：（共40分）

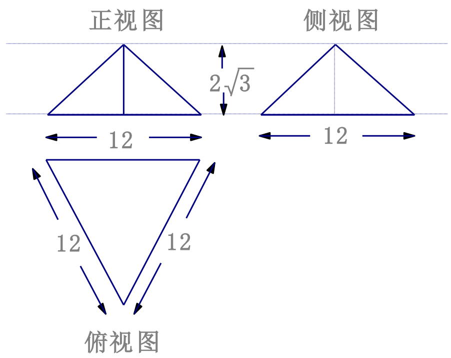
16. （8分） 已知两条直线 l_1: $x-2y+4=0$ 和 l_2: $3x+y-2=0$ 的交点是P，求：
(1)点P到直线a：$3x-4y+5=0$ 的距离；(2)经过点P，且与直线b：$2x-4y-3=0$ 垂直的直线方程.

17.（8分）如图，已知正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为2，O是底面ABCD的中心，E是 C_1C 的中点.
(1)求异面直线OE与BC所成角的余弦值；(2)求直线OE与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值；(3)求证：对角面 AA_1C_1C 与对角面 BB_1D_1D 垂直.



18.（8分）已知直线 l: $y=x+2$，一个圆的圆心C在x轴上且该圆与y轴相切，该圆经过点A（-1，2）. 求：(1)圆C的方程； (2)直线 l 被圆截得的弦长.

19.（8 分）一个正三棱锥 P—ABC 的三视图如图所示，尺寸单位：cm .
求⑴正三棱锥 P—ABC 的表面积；　　⑵正三棱锥 P—ABC 的体积.



20.（8 分）已知圆 C：$x^2+y^2-8y+12=0$ 和直线 l：$mx+y+2m=0$.

(1) 当 m 为何值时，直线 l 与圆 C 相切；

(2) 当直线 l 与圆 C 相交于 A、B 两点，且 $AB=2\sqrt{2}$ 时，求直线 l 的方程.

数学 3：

第一章　算法初步

★学习目标

节　次	学　习　目　标
算法与程序框图	知道算法的思想和含义，理解程序框图的三种基本逻辑结构.
基本算法语句	了解条件语句、循环语句，理解输入语句、输出语句、赋值语句
算法案例	知道辗转相除法、更相减损术、秦久韶算法与进位制

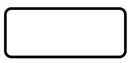
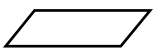
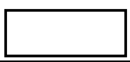
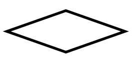
★要点解读

本章主干知识：算法的含义、程序框图、基本算法语句，辗转相除法、更相减损术、秦久韶算法、与进位制.

1．算法的含义

在数学中，算法通常是指按照一定规则解决某一类问题的明确和有限的步骤．算法的特点：有限性（一个算法的步骤是有限的，必须在有限操作之后停止，不能是无限的.）、确定性（算法的每一步骤和次序应当是确定的）、有效性(算法的每一步骤都必须是有效的).

2. 程序框、流程线的名称与功能

图形符号	名称	功能
	起止框（终端框）	表示一个算法的起始和结束
	输入输出框	表示一个算法输入和输出的信息
	处理框（执行框）	赋值、计算
	判断框	判断某一条件是否成立，成立时在出口处标明“是”或“Y”；不成立时标明“否”或“N”.
	流程线	连接程序框
○	连接点	连接程序框图的两部分

3．算法的基本逻辑结构和基本算法语句

（1）、三种基本逻辑结构：顺序结构、条件结构、循环结构

（2）、基本算法语句：输入语句、输出语句、赋值语句、条件语句、循环语句

（3）、循环语句分 WHILE 型语句和 UNTIL 型语句，设计循环语句程序时要注意：①循环语句中的变量一般需要进行一定的初始化操作；②循环语句在循环的过程中需要有“结束”的机会；③循环的过程中变量的变化规律.

4．算法案例

学习辗转相除法与更相减损术、秦久韶算法、进位制时，必须了解其历史背景，理解解题原理，掌握解题步骤.

★学法指导

1．规范基本语句一般格式

【方法点拨】输入语句中提示内容与变量之间用分号“；”隔开，若输入多个变量，变量与变量之间用逗号“，”隔开.输出语句显示算法的输出结果功能，输出语句输出常量、变量或表达式的值或字符.赋值语句将表达式所代表的值赋给变量，赋值语句左边只能是变量名字，而不是表达式，右边表达式可以是一个数据、常量和算式.

【案例分析】 判断下列给出的语句是否正确，将错误的语句改正过来？

（1）、INPUT　$a;b;c$　　（2）、INPUT　$x=3$　　（3）、PRINT　$A=4$

（4）、$3=B$　　（5）、$x+y=0$　　（6）、$A=B=4$

【解析】：（1）、错，变量之间应该用“，”隔开，而不是”；”

（2）、错，INPUT 后面只能是变量，不能是表达式，应改为：INPUT　x

（3）、错，PRINT 语句不能用赋值号“=”，应改为：PRINT　A

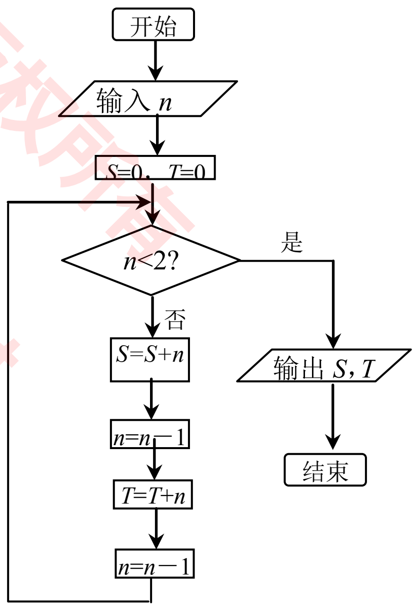
（4）、错，赋值号左边只能是变量，右边是一个常数或表达式，本题显然将左右互换了，应改为 $B=3$

（5）、错，不能给一个表达式赋值

（6）、错，一个赋值语句只能给一个变量赋值应改为：$A=4$

$B=A$

【点评】：本题属于“理解”层次，输入语句、输出语句、赋值语句都有一般格式，任何细微错误都会导致整个程序无法运行.



图①

2．理解流程图所表达的含义

【方法点拨】：理解流程图所表达的含义，一方面，给出程序框图能指出功能，另一方面，根据框图能得到输出的结果.

【案例分析】 阅读图①的程序框图，若输入的 n 是 100，则输出的变量 s 和 T 的值依次是_____、____

【解析】：由程序框图知，S=100+98+96+……+2=2550

T=99+97+95+……+1=2500

【点评】：本题属于“理解”层次，关键点在于理解流程图所蕴含的实际意义.

3、掌握循环语句的功能

【方法点拨】两种循环语句中判断和循环的顺序，以及变量的初始值和控制循环的条件是决定结果的关键点.

【案例分析】某位同学用 WHILE 型语句和 UNTIL 型语句分别设计了一个求 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$ 的值的程序，程序如下：

```
i=1
sum=1
WHILE   i<100
sum =sum+1/i
i=i+1
WEND
PRINT sum
END
```

WHILE 型

```
i=1
sum=0
DO
sum =sum+1/i
i=i+1
LOOP UNTIL   i>=100
PRINT   sum
END
```

UNTIL 型

试判断是否正确?

【解析】：在 WHILE 型程序里面 i=1 、sum=1，控制循环的条件为 i<=100，按此算法最后得到的结果应为$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}$，所以应将 sum=1 改为 sum=0；

在 UNTIL 型程序里面 i=1 、sum=0，控制循环的条件为 i>=100，按此算法最后得到的结果应为$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}$，应将 i>=100 改为 i>100.

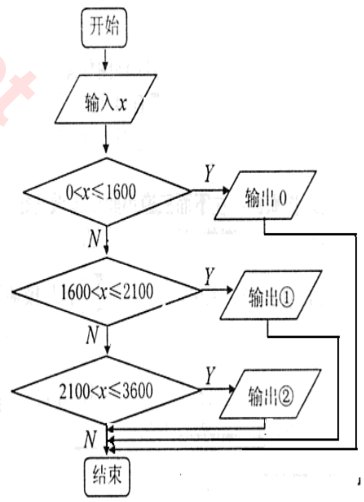
【点评】：本题属于“理解”层次，循环语句一定要注意检验起始和末尾.

4．注重算法的实践应用

【方法点拨】用算法处理应用问题的基本思路是：分析实际问题——建立数学模型——写算法步骤——画程序框图——编制算法程序.体现算法“逐渐精确”的过程，这是算法解决实际问题的步骤.

【案例分析】2006 年 1 月份开始实施的《个人所得税法》规定：全月总收入不超过 1600 元的免征个人工资、薪金所得税，超过 1600 元部分需征税，设全月总收入金额为 x 元，前三级税率如下表所示：

级数	全月应纳税金额 x-1600	税率
1	不超过 500 元部分	5%
2	超过 500 元至 2000 元部分	10%
3	超过 2000 元至 5000 元部分	15%
……	……	……



当月工资薪金所得不超过 3600 元，计算个人所得税的一个算法框图如右图，则输出①输出②分别为（　）

A．$0.05x, 0.1x$　B．$0.05x, 0.1x-185$

C．$0.05x-80, 0.1x$　D．$0.05x-80, 0.1x-185$

【解析】：由题意知 ①得到的答案为$0.05\cdot(x-1600)=0.05x-80$

②得到的答案处为$0.1\cdot(x-2100)+500\cdot0.05=0.1x-185$.　所以选 D

【点评】：本题属于“理解”层次，考查条件结构的简单应用，解答的关键点是根据程序框图写出分段函数的解析式.

★阶梯练习

A 级

1．下列不能看成算法的是（　）

A 从长沙到北京旅游，先坐火车，再坐飞机抵达

B 做红烧肉的菜谱

C 方程 $x^2-1=0$ 有两个实根

D 求 1+2+3+4+5 的值，先计算 1+2=3,再由于 3+3=6，6+4=10，10+5=15，最终结果为 15

2. 将两个数 a=8,b=17 交换,使 a=17,b=8,下面语句正确一组是（　）

A.
```
a=b
b=a
```
B.
```
c=b
b=a
a=c
```
C.
```
b=a
a=b
```
D.
```
a=c
c=b
b=a
```

3．用二分法求方程 $x^2-2=0$ 的近似根的算法中要用到的算法结构（　）

A．顺序结构　　B．条件结构　　C．循环结构　　D．以上都用

4. 右边为一个求 20 个数的平均数的程序,在横线上应填充的是（　）

A.　i>20　　　B.　i<20

C.　i>=20　　 D.　i<=20

```
S=0
i=1
DO
  INPUT  x
  S=S+x
  i=i+1
LOOP UNTIL  _____
a=S/20
PRINT  a
END（第 4 题）
```

5. 将 389 化成四进位制数的末位是（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 0

6. 用秦九韶算法计算多项式

$f(x)=3x^6+4x^5+5x^4+6x^3+7x^2+8x+1$ 当 $x=0.4$ 时的值

时,需要做乘法和加法的次数分别是：____、____次

7. 执行程序语句 A=20, A=-A+10, 最后 A 的值为____

8. 用辗转相除法求 80 和 36 的最大公约数，并用更相减损术检验所得结果.

B 级

9．下图程序运行后输出的结果为　（　）

A. 50　　　B. 5　　　C. 25　　　D. 0

```
a=0
j=1
WHILE  j<=5
   a=(a+j) MOD 5
   j=j+1
WEND
PRINT  a
END（第 9 题）
```

```
x=5
y=－20
IF  x<0  THEN
    x=y－3
ELSE
    y=y+3
END IF
PRINT  x－y ;  y－x
END （第 11 题）
```

10. 三个数 72,120,168 的最大公约数是______

11.图中程序运行后输出的结果为_______

12． 把求$n!$的程序补充完整.

```
______ "n=";n
i =1
s=1
______ i<=n
s=s*i
i=i+1
_____
PRINT s
END
```

13． 设计一个计算 1+2+3+…+100 的值的算法

C 级

14. 用秦九韶算法计算多项式$f(x)=12+35x-8x^2+79x^3+6x^4+5x^5+3x^6$在$x=-4$时的值时，求$v_3$ 的值.

15. 求满足 1+2+3+4+……+n>560 的最小自然数 n.

(1) 画出执行该问题的程序框图；

(2) 以下是解决该问题的一个程序，但有几处错误，找出错误并在右边改正.

i=1 *s*=1 *n*=0 *Do* *s*<=560 *s*=*s*+*i* *i*=*i*+1 *n*=*n*+1 *WEND* *PRINT* *n*+1 *END*	

第二章　统计

★学习目标

节　次	学　习　目　标
随机抽样	了解随机抽样的必要性和重要性；理解用简单随机抽样方法从总体中抽取样本；　了解分层抽样和系统抽样方法.
用样本估计总体	理解列频率分布表、画频率分布直方图、频率折线图、茎叶图. 了解样本数据标准差的意义和作用；了解合理选取样本、从样本数据中提取基本的数字特征，并能做出合理的解释；理解用样本的频率分布估计总体分布、用样本的数字特征估计总体的数字特征；理解随机抽样的基本方法和样本估计总体的基本思想的实际应用.
变量间的相关关系	了解散点图的作法；了解利用散点图直观认识变量之间的相关关系；知道最小二乘法；了解根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程.

★要点解读

本章主干知识：简单随机抽样、系统抽样、分层抽样；样本频率分布估计总体分布；样本数字特征估计总体数字特征；散点图和线性回归方程，变量间的相关关系.

1．三种抽样的联系与区别

抽样分为简单随机抽样、系统抽样、分层抽样，其中简单随机抽样分为抽签法、随机数法，三者抽样的区别与联系是：

（1）联系：简单随机抽样和系统抽样都是一种等概率抽样；分层抽样时，在每一层内进行抽样时可根据具体情况，采用简单随机抽样或系统抽样

（2）区别：一般当总体个数较多时，常采用系统抽样，当总体由差异明显的几部分组成时，常用分层抽样，一般地，实现简单随机抽样.

2．样本频率分布估计总体分布、样本数字特征估计总体数字特征

（1）样本频率分布估计总体分布包括频率分布直方图、折线图与茎叶图.

（2）样本数字特征估计总体数字特征包括平均数，中位数、众数、方差和标准差.

3．变量间的相关关系

现实世界中两个变量的关系中更多的是相关关系而不是确定性关系，现在广泛采用的最小二乘法所用的思想是找到使散点到直线 $\hat{y}=bx+a$ 在垂直方向上的距离的平方和最小的直线 $\hat{y}=bx+a$，用这个方法，对 a,b 的求解最简单.

★学法指导

1．明确各种抽样的特点

【方法点拨】简单随机抽样、系统抽样、分层抽样中，个数不多时一般用简单随机抽样，一般当总体个数较多时，常采用系统抽样，当总体由差异明显的几个部分组成时，常用分层抽样，

【案例分析】 某高中共有 900 人，其中高一年级 300 人，高二年级 200 人，高三年级 400 人，现采用分层抽样抽取容量为 45 的样本，那么高一、高二、高三各年级抽取的人数分别为(　)

A、15, 5, 25　　　　B、15, 15, 15

C、 10, 5, 30　　　　D、15, 10, 20

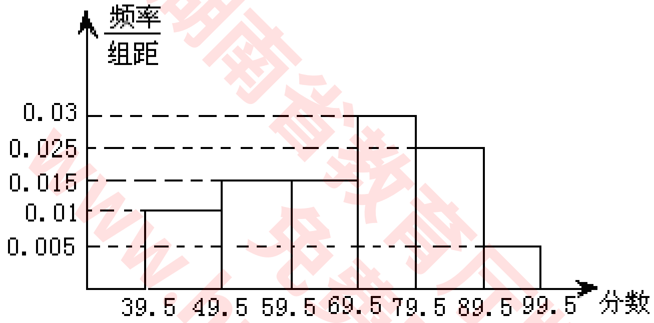
【解析】： 因为 300：200：400=3：2：4，于是将 45 分成 3：2：4 的三部分.设三部分各抽取的个体数分别为 3x,2x,4x,由 3x+2x+4x=45，得 x=5，故抽取的人数分别为 15，10，20，故选 D.

【点评】：本题属“了解”层次，三种抽样方法有其适应的不同范围，解题时应充分理解题意，合理使用抽样方法.

2．频率分布直方图与条形图的理解与应用

【方法点拨】频率分布直方图非常直观地表明了样本数据的分布情况，利用各小长方形的面积=频率；各小长方形的面积之和=1 即可.

【案例分析】如图③，从参加环保知识竞赛的学生中抽出 60 名，将其成绩（均为整数）整理后画出的频率分布直方图如下：



图③

（1）79.5-89.5 这一组的频数、频率分别是多少？

（2）估计这次环保知识竞赛的及格率（60 分及以上为及格）

【解析】：（1）频率为：$0.025\times10=0.25$，频数：$60\times0.25=15$

（2）$0.015\times10+0.025\times10+0.03\times10+0.005\times10=0.75$

【点评】：此题属“理解”层次，虽然原始数据不能在图中表示出来，但对直方图的正确理解能使我们能够看到频率分布表中看不太清楚的数据模式.

3．利用回归方程解决生活中的实际问题

【方法点拨】线性回归方程是用函数关系拟合相关关系，确定回归方程首先应求出系数的值，然后通过确定方程解决实际问题.

【案例分析】 某个体服装店经营某种服装在某周内获纯利y（元）与该周每天销售这件服装件数x（件）之间有如下数据：

（1)求，$\bar{x}$，$\bar{y}$ ；

服装件数 x（件）	3	4	5	6	7	8	9
某周内获纯利y（元）	66	69	73	81	89	90	91

（2）若纯利y与每天销售这件服装件数x之间是线性相关的，求回归方程.

（3）若该店每天至少要获利 200 元，请你预测该店每天至少要销售这种服装多少件？

【解析】：（1）易求得$\bar{x}=6$，$\bar{y}=79.86$；

（2）设回归直线方程 $\hat{y}=bx+a$，由公式可求得 $b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i-7\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7\overline{x}^2}\approx 4.75$

将 $\overline{x}=6$，$\overline{y}=79.86$ 代入回归直线方程中，得 $\hat{y}=4.75x+51.36$

（3）将 y=200 代入方程,求得 x=31.293 所以至少要销售这种服装 32 件

【点评】： 本题属于“了解”层次，着重考查了利用回归直线方程对总体进行估计的数学思想.

★阶梯练习

A 级

1．某单位有老年人 28 人，中年人 54 人，青年人 81 人．为了调查身体状况，需从他们中抽取一个容量为 36 的样本，最适合抽取样本的方法是(　　)

A、简单随机抽样　　B、系统抽样　C、分层抽样　D、先从老年人中剔除一人再分层抽样

2．10 名工人某天生产同一零件，生产的件数是 15，17，14，10，15，17，17，16，14，12．设其平均数为 a，中位数为 b，众数为 c，则有(　　)

A、a>b>c　　B、b>c>a　　C、c>a>b　　D、c>b>a

3．在频率分布直方图中，小矩形的高表示（　　）

A、频率/样本容量　B、组距×频率　C、频率　D、频率/组距

4．下面哪些变量是相关关系（　　）

A.、出租车费与行驶的里程　　B、房屋面积与房屋价格

C、身高与体重　　D、铁的大小与质量

5．在统计中，样本的标准差可以近似地反映总体的（　　）

A、平均状态　　B、分布规律　　C、波动大小　　D、最大值和最小值

6．容量为100的样本数据，按从小到大的顺序分为8组，如下表：

组号	1	2	3	4	5	6	7	8
频数	10	13	x	14	15	13	12	9

第三组的频数和频率分别是 ______、______

7．某人使用计算器求 30 个数据的平均数时，错将其中一个数据 105 输人为 15，由此求出的平均数与实际平均数的差是________

8．关于某设备的使用年限 x 和所支出的维修费用 y（万元），有如下的统计数据 $(x_i,\ y_i)(i=1,2,3,4,5)$，由资料知 y 对 x 呈线性相关，并且统计的五组数据的平均值分别为 $\overline{x}=4$，$\overline{y}=5.4$，若用五组数据得到的线性回归方程 $\hat{y}=bx+a$ 去估计，使用 8 年的维修费用比使用 7 年的维修费用多 1．1 万元.

（1）求回归直线方程；　　　（2）估计使用年限为 10 年时，维修费用是多少？

B 级

9．已知回归方程 $\hat{y}$ ＝1.5x－15，则（　　）

A、$\bar{y}$ ＝1.5$\bar{x}$ －15　B、15 是回归系数 a　C、1.5 是回归系数 a　D、x＝10 时，y＝0

10.一个公司共有240名员工，要采用分层抽样方法从全体员工中抽取一个容量为20的样本，已知某部门有60名员工，那么从这一部门抽取的员工人数是______

11．数据－2，－1，0，1，2 的方差是______

12．频率分布直方图中各小长方体的面积和为______

13．某展览馆 22 天中每天进馆参观的人数如下：

180	158	170	185	189	180	184	185	140	179	192
185	190	165	182	170	190	183	175	180	185	148

计算参观人数的中位数、众数、平均数、标准差.

C 级

14．从甲乙两台机器生产的零件中各随机抽取 15 个进行检验，相关指标的检验结果为：

甲：534，517，528，522，513，516，527，526，520，508，533，524，518，522，512

乙：512，520，523，516，530，510，518，521，528，532，507，516，524，526，514

画出上述数据的茎叶图.由茎叶图可以发现有什么结论？

15.为了解某地高一男生的身高情况，从其中的一个学校选取容量为 60 的样本(60 名男生的身高)，分组情况如下：

分组	147.5～155.5	155.5～163.5	163.5～171.5	171.5～179.5
频数	6	21		m
频率			a	0.1

(1)求 a，m 的值.　　　　　　　(2)画出频率分布直方图

第三章　概率

★学习目标

节　次	学　习　目　标
随机事件的概率	知道概率的意义及频率和概率的区别.
古典概率	了解两个互斥事件的概率加法公式及应用,理解古典概型及其概率的计算公式、用列举法计算概率.
几何概率	了解几何概型的意义.

★要点解读

本章主干知识：概率的意义及频率和概率；两个互斥事件的概率加法公式；古典概率和几何概率.

1.　频率与概率

频率与概率有本质的区别，频率随着试验次数的改变而改变，概率是一个常数，是客观存在的，与每次试验无关，它是频率的科学抽象，当试验次数越来越多时频率向概率靠近.

2．事件与事件间的关系

（1）．随机事件的概念：在一定的条件下所出现的某种结果叫做事件.

① 随机事件：在一定条件下可能发生也可能不发生的事件；

② 必然事件：在一定条件下必然要发生的事件；

③ 不可能事件：在一定条件下不可能发生的事件.

（2）．事件间的关系

① 互斥事件：不能同时发生的两个事件叫做互斥事件；

② 对立事件：不能同时发生，但必有一个发生的两个事件叫做互斥事件；

③ 包含：事件 A 发生时事件 B 一定发生，称事件 A 包含于事件 B（或事件 B 包含事件 A）；

（3）．事件间的运算

① 并事件（和事件）

若某事件的发生是事件 A 发生或事件 B 发生，则此事件称为事件 A 与事件 B 的并事件.

注：当 A 和 B 互斥时，事件 $A+B$ 的概率满足加法公式：

P（$A+B$）$=P$（A）$+P$（B）（A、B 互斥）；且有 P（$A+\overline{A}$）$=P$（A）$+P$（$\overline{A}$）$=1$.

② 交事件（积事件）

若某事件的发生是事件 A 发生和事件 B 同时发生，则此事件称为事件 A 与事件 B 的交事件.

3．古典概率

（1）古典概率：如果一次试验中所有可能出现的基本事件只有有限个，且每个基本事件出现的可能性相等，则具有这两个特点的概率模型称为古典概型．古典概型的两大特点：①试验中所有可能出现的基本事件只有有限个；②每个基本事件出现的可能性相等；

（2）古典概型的概率公式：　P（A）=事件 A 所包含的基本事件的个数÷基本事件的总数，

4．几何概率

（1）如果一个随机试验可能出现的结果有无限多个，并且每个结果发生的可能性相等，那么该试验可以看作是几何概型.

（2）几何概型的概率公式 ：P（A）= 构成事件 A 的区域长度（面积或体积）÷试验的全部结果所构成的区域长度（面积或体积）

★学法指导

1．知道频率与概率的联系与区别

【方法点拨】在试验应用中，只要次数足够多，所得频率就近似地当作随机事件的概率.

【案例分析】某种菜籽在相同的条件下发芽试验结果如下表：（求其发芽的概率）

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715

【解析】：根据表格只能计算不同情况下的种子发芽的频率分别是：1，0.8，0.9，0.857，0.892，0.910，0.913，0.893，0.903，0.905.随着种子粒数的增加，菜籽发芽的频率越接近于 0.9，且在它附近摆动.故此种子发芽的概率为 0.9.

【点评】：本题属于"知道"层次，用频率的趋向近似值表示随机事件发生的概率.

2．了解互斥事件和对立事件的异同

【方法点拨】在一次试验中，若事件 A 与 B 不能同时发生，则称事件 A、B 为互斥事件；若事件 A 与 B 不能同时发生，且事件 A、B 必有一个发生，则称事件 A、B 为对立事件.对立事件必须是互斥事件，互斥事件不一定是对立事件（如三类及三类以上的互斥事件就不是对立事件）.

【案例分析】把标号为 1，2，3，4 的四个小球随机地分发给甲、乙、丙、丁四个人，每人分得一个.事件"甲分得 1 号球"与事件"乙分得 1 号球"是（　　）

A、互斥但非对立事件　　　　B、对立事件

C、相互独立事件　　　　D、以上都不对

【解析】：A.

【点评】：本题属于"了解"层次，考察对立和互斥的定义.

3．准确理解古典概型的条件

【方法点拨】利用古典概型的计算公式时关键的两点：（1）所有的基本事件必须是互斥的；（2）m 为事件 A 所包含的基本事件数，求 m 值时，要做到不重不漏.

【案例分析】掷两枚骰子，求所得的点数之和为 6 的概率.

错解：掷两枚骰子出现的点数之和不同情况为{2，3，4，…，12}，故共有 11 种基本事件，所以概率为 $P=\frac{1}{11}$；

【解析】：剖析：以上 11 种基本事件不是等可能的，如点数和 2 只有(1，1)，而点数之和为 6 有(1，5)、(2，4)、(3，3)、(4，2)、(5，1)共 5 种.事实上，掷两枚骰子共有 36 种基本事件，且是等可能的，所以"所得点数之和为 6"的概率为 $P=\frac{5}{36}$.

【点评】：本题属于"理解"层次，考察古典概率模型，列举时必须按某一顺序做到不重不漏.我们经常见的错里还有"投掷两枚硬币的结果"，划分基本事件"两正、一正一反、两反"，其中"一正一反"与"两正"、"两反"的机会是不均等.

4、了解几何概型的解法

【方法点拨】；几何概型试验概率的计算，关键是求得事件 A 所占区域和整个区域的几何度量，然后代入公式即可求解.

【案例分析】两人相约 7 点到 8 点在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时离去. 求两人能够会面的概率.

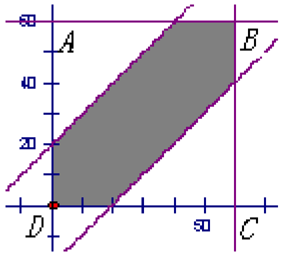
【解析】：设两人到达的时间分别为 7 点到 8 点之间的 x 分钟、y 分钟.

用 (x,y) 表示每次试验的结果，则所有可能结果为

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\le x\le 60,0\le y\le 60\};$$

记两人能够会面为事件 A，则事件 A 的可能结果为

$$A=\{(x,y)\mid |y-x|\le 20,0\le x\le 60,0\le y\le 60\}.$$



如图所示，试验全部结果构成区域Ω 为正方形 $ABCD$. 而事件 A 所构成区域是正方形内两条直线 $y-x=20$，$x-y=20$ 所夹中间的阴影部分. 根据几何概型公式，得到

$$P(A)=\frac{S_{阴影}}{S_{正方形}}=\frac{60^2-\frac{(60-20)^2}{2}\times 2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$ 所以，两人能够会面的概率为 $\frac{5}{9}$.

【点评】：本题属于“了解”层次，考查几何概率，采用四步曲“构设变量→集合表示→作出区域→计算概率”来求解，关键是理解题意.

★阶梯练习

A 级

1. 下列说法正确的是（　　）

A、任何事件的概率总是在（0，1）之间　　B、频率是客观存在的，与试验次数无关

C、随着试验次数的增加，频率一般会越来越接近概率

D、概率是随机的，在试验前不能确定

2. 在 1，2，3，…，10 这 10 个数字中，任取 3 个数，那么“这 3 个数字之和大于 6”这一事件是（　　）

A、必然事件　　B、随机事件　　C、不可能事件　　D、以上均不正确

3. 抛掷一枚质地均匀的硬币，如果连续抛掷 1000 次，那么第 999 次出现正面朝上的概率（　）

A、$\frac{1}{999}$　　B、$\frac{1}{1000}$　　C、$\frac{999}{1000}$　　D、$\frac{1}{2}$

4. 从一批产品中取出三件产品，设 A=“三件产品全不是次品”，B=“三件产品全是次品”，C=“三件产品不全是次品”，则下列结论正确的是（　）

A、A 与 C 互斥　　B、B 与 C 互斥　　C、任何两个均互斥　　D、任何两个均不互斥

5. 从一批羽毛球产品中任取一个，其质量小于 4.8g 的概率为 0.3，质量小于 4.85g 的概率为 0.32，那么质量在[4.8，4.85]（ g ）范围内的概率是（　）

A、　0.62　　B 、　0.38　　C 、　0.02　　D 、　0.68

6. 同时抛掷两枚质地均匀的硬币，则出现两个正面朝上的概率是______

7. 已知地铁的每趟列车停站的时间为 1 分钟，而每趟列车先后到站之间的时间差为 7 分钟，那么到地铁站坐地铁时，不用等待就可以坐到车的概率为______

8. 从含有两件正品 a_1，a_2 和一件次品 b_1 的三件产品中，每次任取一件，每次取出后不放回，连续取两次，求取出的两件产品中恰有一件次品的概率.

B 级

9. 甲、乙两支足球队比赛，比赛结果为平局的概率是 $\frac{1}{3}$，乙队获胜的概率是 $\frac{1}{3}$，则甲队不获胜的概率为（　　）

A 、 $\frac{2}{3}$　　B 、 $\frac{1}{3}$　　C 、 $\frac{1}{6}$　　D 、 $\frac{1}{2}$

10. 掷两枚骰子，出现点数之和为 3 的概率是_____

11. 向长度为 1 厘米的线段内随机投点，则事件 A“该点命中线段的中点”的概率为_____

12. 我国西部一个地区的年降水量在下列区间内的概率如下表所示：

年降水量/mm	[100, 150)	[150, 200)	[200, 250)	[250, 300]
概率	0.21	0.16	0.13	0.12

则年降水量在 [200，300] （m,m）范围内的概率是_____

13. 经统计，在某储蓄所一个营业口等候的人数及相应概率如下：

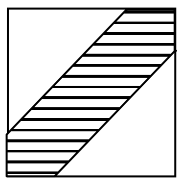
排队人数	0	1	2	3	4	5 人及 5 人以上
概率	0. 1	0. 16	0. 3	0. 3	0. 1	0. 04

问：至少 3 人排队等候的概率是多少？

C 级

14. 10 本不同的语文书，2 本不同的数学书，从中任意取出 2 本，能取出数学书的概率有多大？

15. 如图，在边长为 25cm 的正方形中挖去边长为 23cm 的两个等腰直角三角形，现有均匀的粒子散落在正方形中，问粒子落在中间带形区域的概率是多少？

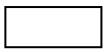
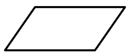
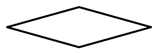
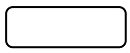


必修 3 检测卷

本试题包括选择题、填空题和解答题三部分.时量 120 分钟.满分 100 分

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案的代号填在题后的括号内.）

1．程序框图中表示判断的是（　　）

A、　　B 、　　C、　　D、

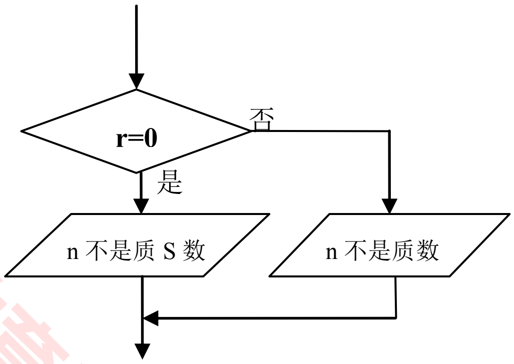
2．把 89 化成五进制数的末位数字为（　　）

A 、 1　　B、 2　　C 、 3　　D、 4

3．图①是某算法流程图的一部分，其算法的逻辑结构为（　　）

A、 顺序结构　　B、 判断结构

C、 条件结构　　D、 循环结构



图①

4．某公司在甲、乙、丙、丁四个地区分别有 150 个、120 个、180 个、150 个销售点，公司为了调查产品销售的情况，需从这 600 个销售点中抽取一个容量为 100 的样本，记这项调查为(1)；在丙地区中有 20 个特大型销售点，要从中抽取 7 个调查其销售收入和售后服务情况，记这项调查为(2). 则完成(1)、(2)这两项调查宜采用的抽样方法依次是（　　）

A 、分层抽样法，系统抽样法　　B 、分层抽样法，简单随机抽样法

C 、系统抽样法，分层抽样法　　D 、简单随机抽样法，分层抽样法

5．下列事件为确定事件的有（　　）个

（1）在一标准大气压下，$20^{\circ}C$ 的水结冰　（2）边长为 a, b 的长方形面积为 ab

（3）抛一个硬币，落地后正面朝上　（4）平时的百分制考试中，小白的考试成绩为 105 分

A 、1 个　　B 、 2 个　　C 、 3 个　　D 、 4 个

6．若用水量 x 与某种产品的产量 y 的回归方程是 $\hat{y}=2x+1250$，则当用水量为 50kg 时，预计的某种产量是（　　）

A 、 大于 1350kg　　B 、小于 1350kg　　C 、 1350kg　　D 、 以上都不对

7. 先后抛掷质地均匀的硬币三次，则至少一次正面朝上的概率是（　　）

A 、 $\frac{1}{8}$　　B 、 $\frac{3}{8}$　　C 、 $\frac{5}{8}$　　D 、 $\frac{7}{8}$

8．从某项综合能力测试中抽取 100 人的成绩，统计如表，则这 100 人成绩的标准差为（　　）

分数	5	4	3	2	1
人数	20	10	30	30	10

A、$\sqrt{3}$　　　　B、$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$　　　　C、3　　　　D、$\dfrac{8}{5}$

9．盒中有 10 个铁钉，其中 8 个是合格的，2 个是不合格的，从中任取一个恰为合格铁钉的概率是（　　）

A、$\dfrac{1}{5}$　　　　B、$\dfrac{1}{4}$　　　　C、$\dfrac{4}{5}$　　　　D、$\dfrac{1}{10}$

10．在长为 10 cm 的线段 AB 上任取一点 P，并以线段 AP 为边作正方形，这个正方形的面积介于 25 cm^2 与 49 cm^2 之间的概率为(　　)

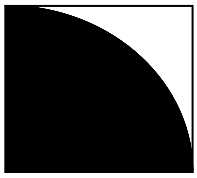
A、$\dfrac{3}{10}$　　　　B、$\dfrac{1}{5}$　　　　C、$\dfrac{2}{5}$　　　　D、$\dfrac{4}{5}$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.把答案填在题中横线上.）

11. 459 和 357 的最大公约数是________

12．管理人员从一池塘内捞出 30 条鱼，做上标记后放回池塘.10 天后，又从池塘内捞出 50 条鱼，其中有标记的有 2 条.根据以上数据可以估计该池塘内共有_____条鱼.

13．如图②，在正方形内有一扇形（见阴影部分），扇形对应的圆心是正方形的一顶点，半径为正方形的边长.在这个图形上随机撒一粒黄豆，它落在扇形外正方形内的概率为 ________



图②

14．已知样本 $9,10,11,x,y$ 的平均数是 10，标准差是 $\sqrt{2}$，则 $xy=$_______

15．阅读以下程序：
```
INPUT  x
IF  x>0   THEN
    y=3x+1
ELSE
    y=-2x+3
END  IF
PRINT  y
END
```
若输入 x=5，求输出的 y =____

三、解答题（本大题共 5 小题，共 40 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16.（本题满分 6 分）在 2008 奥运会上两名射击运动员甲、乙在比赛中打出如下成绩：

甲：9.4，8.7，7.5，8.4，10.1，10.5，10.7，7.2，7.8，10.8；

乙：9.1，8.7，7.1，9.8，9.7，8.5，10.1，9.2，10.1，9.1；

用茎叶图表示甲，乙两个成绩；并根据茎叶图分析甲、乙两人成绩

17．（本题满分 8 分）如图③是某县高三学生身高条形统计图，从左到右的各条形表示的学生人数依次记为 A_1、A_2、……、A_{10}(如 A_2 表示身高(单位：cm)在[150，155)内的学生人数).图④是统计图 1 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图.现要统计身高在 160～180cm(含 160cm，不含 180cm)的学生人数，那么在流程图中的判断框内应填写的条件是什么？并说明理由.

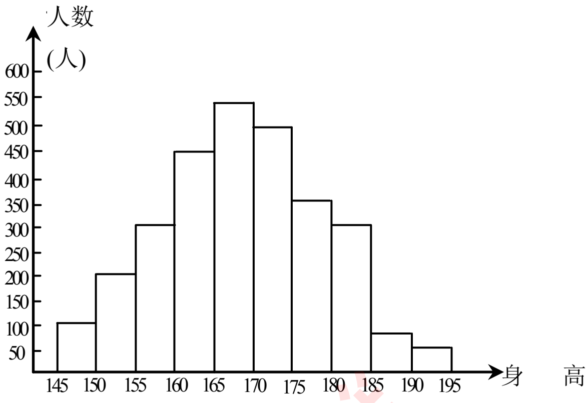


图 3

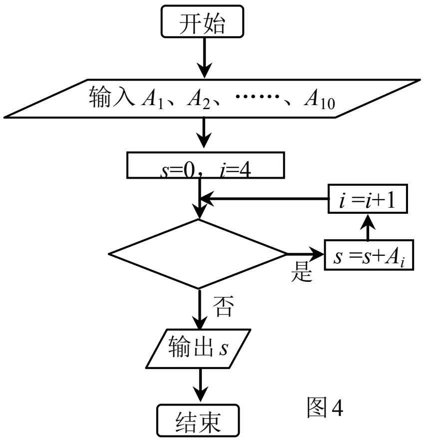


图 4

18．（本题满分 8 分）在人群流量较大的街道，有一中年人吆喝“送钱”，只见他手拿一黑色小布袋，袋中有 3 只黄色、3 只白色的乒乓球（其体积、质地完成相同），旁边立着一块小黑板写道：

摸球方法：从袋中随机摸出 3 个球，若摸得同一颜色的 3 个球，摊主送给摸球者 5 元钱；若摸得非同一颜色的 3 个球，摸球者付给摊主 1 元钱.

（1）摸出的 3 个球为白球的概率是多少？

（2）摸出的 3 个球为 2 个黄球 1 个白球的概率是多少？

（3）假定一天中有 100 人次摸奖，试从概率的角度估算一下这个摊主一个月（按 30 天计）能赚多少钱？

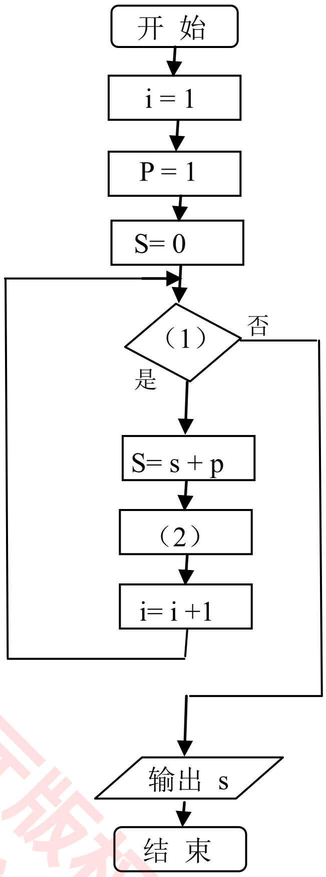
19．（本题满分 8 分）设计一个计算 S=1+3+5+……+49 的流程图

20.（本题满分 10 分）给出 50 个数，1，2，4，7，11，…，其规律是：第 1 个数是 1，第 2 个数比第 1 个数大 1，第 3 个数比第 2 个数大 2，第 4 个数比第 3 个数大 3，…，以此类推. 要求计算这 50 个数的和. 先将下面给出的程序框图补充完整，再根据程序框图写出程序，

把程序框图补充完整：

（1）________

（2）________



数学 4：

第一章 三角函数

★学习目标

节　次	学　习　目　标
任意角和弧度制	知道任意角的概念和弧度制的意义，理解弧度与角度的互化.
任意角的三角函数	了解任意角三角函数的定义，理解同角三角函数的基本关系式.
三角函数的诱导公式	理解正弦、余弦、正切函数的诱导公式.
三角函数的图象与性质	理解正弦、余弦、正切函数的图象画法及性质的运用，理解三角函数的周期性.
函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象	知道 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象及其实际意义.
三角函数模型的简单应用	理解三角函数模型的简单应用并关注其实践应用.

★要点解读

本章主干知识：三角函数的定义、图象、性质及应用，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，三角函数模型在解决具有周期变化规律问题中的应用.

1．任意角和弧度制

从运动的角度，在旋转方向及旋转圈数上引进负角及大于 360^0 的角. 在直角坐标系中，当角的终边确定时，其大小不一定（通常使角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴非负半轴重合）. 为了把握这些角之间的联系，引进终边相同的角的概念，凡是与终边α 相同的角，都可以表示成α +k・360^0 （k∈Z）的形式，特例，终边在 x 轴上的角的集合为{α |α =k・180^0，k∈Z}，终边在 y 轴上的角的集合为{α |α =90^0+k •180^{00}，k∈Z}，终边在坐标轴上的角的集合为{α |α =k •90^0，k∈Z}. 另外，角的终边落在第几象限，就说这个角是第几象限的角.

弧度制是角的度量的重要表示法，能正确地进行弧度与角度的换算，熟记特殊角的弧度制. 在弧度制下，扇形弧长公式ℓ=|α |R，扇形面积公式 $S=\frac{1}{2}\ell R=\frac{1}{2}R^2|\alpha|$，其中α 为弧所对圆心角的弧度数.

2．任意角的三角函数

利用直角坐标系，可以把直角三角形中的三角函数推广到任意角的三角函数. 设 P(x，y)是角α 终边上任一点（与原点不重合），记 $r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

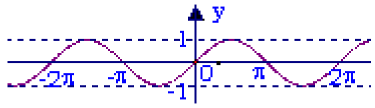
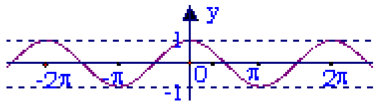
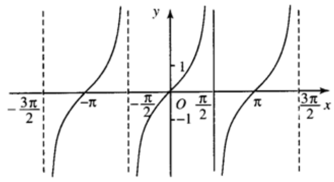
3．同角三角函数的基本关系式

（1）平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　　（2）商数关系：$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

4．三角函数的诱导公式

利用三角函数定义，可以得到诱导公式：即 $\alpha+\frac{k}{2}\pi$ 与α 之间函数值的关系（k∈Z），其规律是“奇变偶不变，符号看象限”．

5．三角函数的图象与性质

函数	y=sinx	y=cosx	y=tanx
图象			
定义域	R	R	$\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
周期性	2π	2π	π
单调性	在 $[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]\ (k\in Z)$ 上是增函数 在 $[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]\ (k\in Z)$ 上是减函数	在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]\ (k\in Z)$ 上是增函数 在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]\ (k\in Z)$ 上是减函数	在 $(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2})\ (k\in Z)$ 上是增函数
最值	当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 时，$y_{\max}=1$ 当 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$ 时，$y_{\min}=-1$	当 $x=2k\pi,k\in Z$ 时，$y_{\max}=1$ 当 $x=(2k+1)\pi,k\in Z$ 时，$y_{\min}=-1$	无
对称性	对称中心 $(k\pi,0)$，$k\in Z$ 对称轴：$x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$	对称中心 $(k\pi+\frac{\pi}{2},0)$，$k\in Z$ 对称轴：$x=k\pi\ (k\in Z)$	对称中心 $(k\pi,0)$，$k\in Z$ 对称轴：无

6．函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象

作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象主要有以下两种方法：

（1）用“五点法”作图

用“五点法”作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图，主要是通过变量代换，设 $z=\omega x+\varphi$，由 z 取 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π 来求出相应的 x，通过列表，计算得出五点坐标，描点后得出图象.

（2）用“图象变换法”作图

由函数 $y=\sin x$ 的图象通过变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，有两种主要途径：“先平移后伸缩”与“先伸缩后平移”．

法一：先平移后伸缩

$$y=\sin x \xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y=\sin(x+\varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}} y=\sin(\omega x+\varphi) \xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

法二：先伸缩后平移

$$y=\sin x \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}} y=\sin\omega x \xrightarrow[\text{平移}\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)} y=\sin(\omega x+\varphi)$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}} y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

可以看出，前者平移 $|\varphi|$ 个单位，后者平移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位.原因在于相位变换和周期变换都是针对变量 x 而言的.因此在用这样的变换法作图象时一定要注意平移的先后顺序，否则会出现错误.

当函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（A>0，$\omega>0$，$x\in[0,\ +\infty)$）表示一个振动量时，A 就表示这个量振动时离开平衡位置的最大距离，通常把它叫做这个振动的振幅；往复振动一次所需要的时间 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，它叫做振动的周期；单位时间内往复振动的次数 $f=\frac{1}{T}=\frac{2\pi}{\omega}$，它叫做振动的频率；$\omega x+\varphi$ 叫做相位，φ 叫做初相（即当 x＝0 时的相位）.

7．三角函数模型的简单应用

通过对三角函数模型的简单应用的学习，学会由图象求解析式的方法；体验实际问题抽象为三角函数模型问题的过程；体会三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型.

★学法指导

1．明确任意角的概念，从角的概念推广上理解三角函数的定义

【方法点拨】将角的概念推广，引入弧度制，从而建立角的集合与实数集之间的对应关系，利用单位圆进一步研究任意角的三角函数，树立数形结合思想.

【案例剖析】若角 $\frac{2\pi}{3}$ 的终边上有一点 $(-4,a)$，则 a 的值是（　　）

A．$4\sqrt{3}$　　B．$-4\sqrt{3}$　　C．$\pm4\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{3}$

【解析】$\because \tan\frac{2\pi}{3}=\frac{a}{-4}, \therefore a=-4\tan\frac{2\pi}{3}=4\tan\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，故选 A.

【点评】：本题属于“知道”层次，能准确识别角的弧度制、了解三角函数的定义，数形结合是解决问题的入手点.

2．熟悉同角三角函数的基本关系及诱导公式，在公式的应用中提高运算能力

【方法点拨】利用同角三角函数的基本关系及诱导公式进行三角函数的化简、求值及简单三角恒等式的证明是本章的基本问题之一，其主要考查形式为客观题.

【案例剖析】已知$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，且α是第四象限角，则$\tan\alpha[\cos(3\pi-\alpha)-\sin(5\pi+\alpha)]$=_____

【解析】：$\tan\alpha[\cos(3\pi-\alpha)-\sin(5\pi+\alpha)]=\tan\alpha[\cos(\pi-\alpha)-\sin(\pi+\alpha)]$

$=\tan\alpha(-\cos\alpha+\sin\alpha)=\tan\alpha\sin\alpha-\tan\alpha\cos\alpha=\sin\alpha(\tan\alpha-1)$

由已知得：$\cos\alpha=\frac{4}{5},\tan\alpha=-\frac{3}{4}$，　$\therefore$原式$=\frac{21}{20}$.

【点评】：（1）本题属于“理解”层次，考查考生的基本运算能力；（2）本题解答的关键是灵活运用同角三角函数的基本关系及诱导公式，解题时要特别注意符号.

3、弄清三角函数的图象和性质，深化对主干知识的理解

【方法点拨】三角函数的图象是三角函数概念和性质的直观反映，而性质则往往通过对图象的描绘、观察进行讨论和探究，它是本章知识的重中之重，务必掌握.

【案例剖析】1、已知函数$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 2x}$，试讨论它的奇偶性、周期性以及区间[0，$\frac{\pi}{2}$]上的单调性.

【解析】：$\because f(x)=\sqrt{1-\cos^2 2x}=|\sin 2x|$，$\therefore$　$f(-x)=|\sin(-2x)|=|\sin 2x|=f(x)$，$\therefore f(x)$为偶函数.

$\because f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\left|\sin 2(x+\frac{\pi}{2})\right|=|\sin(2x+\pi)|=|-\sin 2x|=|\sin 2x|=f(x)$，$\therefore$　周期 T=$\frac{\pi}{2}$

$\because f(x)=|\sin 2x|=\sin 2x$，$x\in[0，\frac{\pi}{2}]$，$\therefore f(x)$在$[0,\frac{\pi}{4}]$上$f(x)$单调递增；在$[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$上单调递减.

【点评】：本题属于“理解”层次，考查考生对所学过的内容能进行理性分析；通过对性质的探究进一步弄清函数的图象.

【案例剖析】2、已知函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$（A>0，$\omega$>0，$|\varphi|<\pi$）的最小正周期是$\frac{2\pi}{3}$，最小值是-2，且图象经过点（$\frac{5\pi}{9}$,0），　（1）求这个函数的解析式；（2）给出下列 6 种图象变换方法：

①图象上所有点的纵坐标不变，横坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$；

②图象上所有点的纵坐标不变，横坐标伸长到原来的 3 倍；

③图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位；　　④图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位；

⑤图象向右平移$\frac{\pi}{9}$个单位；　　⑥图象向左平移$\frac{\pi}{9}$个单位.

请用上述变换将函数 $y=A\sin x$ 的图象变换到函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，则能实现 y =A sinx 到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象正确变换序号是_____.

【解析】：（1）由题意得 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3},\omega=3,A=2,y=2\sin(3x+\varphi)$，∵图象过（$\frac{5\pi}{9}$,0），$\therefore 2\sin(3\times\frac{5\pi}{9}+\varphi)=0$ 即 $\sin(\frac{5\pi}{3}+\varphi)=0$ 又 $|\varphi|<\pi$，故函数解析式为 $y=2\sin(3x+\frac{\pi}{3})$

（2）先平移后伸缩的步骤为：④①，先伸缩后平移的步骤为①⑥，故变换为④①或①⑥.

【点评】：本题属于“理解”层次，重点考查 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换和性质，要注意知识间的相互联系.

4．关注三角函数模型的应用，提高知识迁移能力

【方法点拨】解答三角函数应用题的基本步骤：（1）审题：它是解题的基础.通过阅读，理解文字语言所表述的实际问题的类型、思想内涵以及问题的实质，初步预测所属数学模型，同时还要注意挖掘隐含的条件；（2）建模：它是解题的关键.在深入理解的基础上，引进数学符号，将文字语言转化为数学语言，然后根据题意，建立三角函数模型；（3）解模：它是解题的关键.运用三角函数的有关公式、图象和性质进行推理、运算，使问题得以解决.（4）回验：它是解题的总结.应用问题有它的实际背景，对于解出的结果要代入原问题中进行检验、评判.

【案例剖析】以一年为一个周期调查某商品出厂价格及该商品在商店的销售价格时发现：该商品的出厂价格是在 6 元基础上按月份随正弦曲线波动的，已知 3 月份出厂价格最高为 8 元，7 月份出厂价格最低为 4 元，而该商品在商店的销售价格是在 8 元基础上按月随正弦曲线波动的，并已知 5 月份销售价最高为 10 元，9 月份销售价最低为 6 元，假设某商店每月购进这种商品 m 件，且当月售完，请估计哪个月盈利最大？并说明理由.

【解析】：设月份为 x，由条件可得：出厂价格函数为 $y_1=2\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4})+6$，销售价格函数为 $y_2=2\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4})+8$，则每期的利润函数为：

$$y=m(y_2-y_1)=m[2\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{3\pi}{4})+8-2\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4})-6]=m(2-2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x)$$

所以，当 x=6 时，$y_{max}=$（2+$2\sqrt{2}$）m，即 6 月份盈利最大.

【点评】：本题属于“理解”中实践应用层次，考查能运用所学过的知识分析日常生活或生产实践中的数学问题，本题解题的关键是建立出厂价格函数与销售价格函数.

★阶梯练习

A 级

1．已知 A={第一象限角}，B={锐角}，C={小于 90° 的角}，那么 A、B、C 的关系是（　　）

A．A⫋B　　B．B⫋C　　C．A⫋C　　D．A=B=C

2．$\sqrt{\sin^2 120^0}$ 等于（　　）

A．$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D．$\frac{1}{2}$

3．函数 $y=\sin(2x+\varphi)(0\le\varphi\le\pi)$ 是 R 上的偶函数，则 φ 的值是（　　）

A．0　　　　B．$\frac{\pi}{4}$　　　　C．$\frac{\pi}{2}$　　　　D．π

4．函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}$ 的值域是（　　）

A．$\{0,2\}$　　　　B．$\{-2,2\}$　　C．$\{-2,0,2\}$　　　D．$\{-2,1,2\}$

5．若 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 α 的终边过点 $P(x,2)$，则 α 是第_____象限角，$x=$_____.

6．已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，并且 α 是第二象限的角，那么 $\tan\alpha$ 的值等于______________

7．画出函数 $y=1+2\sin x, x\in[0,2\pi]$ 的图象.

8．化简：$\frac{\sin(540^0-x)}{\tan(900^0-x)}\cdot\frac{1}{\tan(450^0-x)\tan(810^0-x)}\cdot\frac{\cos(360^0-x)}{\sin(-x)}$

B 级

9．要得到 y=3sin$x$ 的图象只需将 $y=3\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 的图象　　　　　　　　　　（　　）

A．向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位 B．向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位 C．向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位 D．向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

10．已知函数 $y=2a+\sin x$ 的最大值为 3，则函数 $y=-4\sin\frac{a}{2}x$ 的最小正周期为____________，值域为________________.

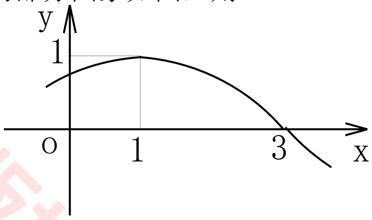
11．在半径为$30m$的圆形广场中央上空，设置一个照明光源，射向地面的光呈圆锥形，且其轴截面顶角为120^0，若要光源恰好照亮整个广场，则其高应为______m（精确到$0.1m$）

12．已知$f(x)=\begin{cases}\cos \pi x, x<1\\ f(x-1)-1, x>1,\end{cases}$求$f(\frac{1}{3})+f(\frac{4}{3})$的值.

13．一个扇形OAB的周长为20，求扇形的半径，圆心角各取何值时，此扇形的面积最大？

C 级

14．函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（x∈R，$\omega>0$，$0\leq\varphi<2\pi$）的部分图象如图，则（　　　　）



A．$\omega=\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{5\pi}{4}$　B．$\omega=\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{\pi}{4}$

C．$\omega=\frac{\pi}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$　D．$\omega=\frac{\pi}{3}, \varphi=\frac{\pi}{6}$

15．某港口水的深度y（米）是时间t（$0\leq t\leq 24$，单位：时）的函数，记作$y=f(t)$，下面是某日水深的数据：

t/h	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y/m	10.0	13.0	9.9	7.0	10.0	13.0	10.1	7.0	10.0

经长期观察，$y=f(t)$的曲线可以近似的看成函数$y=A\sin\omega t+b$的图象，根据以上的数据，求函数$y=f(t)$的近似表达式.

第二章 平面向量

★学习目标

节 次	学 习 目 标
平面向量的实际背景及基本概念	了解平面向量和向量相等的含义及向量的几何表示.
平面向量的线性运算	理解向量加、减法的运算及其几何意义，理解向量数乘的运算，了解向量数乘运算的几何意义及两向量共线的含义，知道向量的线性运算性质及其几何意义
平面向量的基本定理及坐标表示	知道平面向量的基本定理及其意义，理解平面向量的正交分解及其坐标表示，理解用坐标表示平面向量的加、减及数乘运算，了解用坐标表示平面向量共线的条件.
平面向量的数量积	了解平面向量数量积的含义及其物理意义，了解平面向量的数量积与向量投影的关系，理解平面向量数量积的坐标表达式及其运算，理解运用数量积表示两个向量的夹角，并判断两个平面向量的垂直关系，并关注学科内综合.
平面向量应用举例	掌握平面向量的应用，并关注学科间联系.

★要点解读

本章主干知识：向量的基本概念和实际背景，平面向量的加、减、数乘以及数量积的运算，特别是坐标运算；利用向量语言和方法表述和解决数学和物理中的一些实际问题.

1．平面向量的实际背景及基本概念

从物理上的力和位移出发，抽象出向量的概念，明确向量与数量的区别：大小和方向是向量的两个要素，它带有方向，具有几何意义，向量不能比较大小；理解向量的基本概念：向量的模、零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量等，要结合图形区分平行向量、相等向量、共线向量等概念：平行向量即共线向量，两向量共线不一定相等，而两向量相等则一定共线，另外，还要注意向量"共线"与线段"共线"的区别：共线向量不考虑起点.

2．平面向量的线性运算

（1）掌握向量的加法运算，并理解其几何意义；会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作两个向量的和向量，培养数形结合解决问题的能力； 通过将向量运算与熟悉的数的运算进行类比，掌握向量加法运算的交换律和结合律，并会用它们进行向量计算，渗透类比的数学方法.

（2）了解相反向量的概念；掌握向量的减法，会作两个向量的减向量，并理解其几何意义；通过阐述向量的减法运算可以转化成向量的加法运算，理解事物之间可以相互转化的辩证思想.

（3）掌握实数与向量积的定义及几何意义；了解数乘运算的运算律，理解向量共线的充要条件.

3．平面向量的基本定理及坐标表示

（1）平面向量的基本定理：如果$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数λ_1，λ_2使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$.

（2）平面向量的坐标运算： 两个向量和与差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和与差；一

个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点坐标减去始点的坐标.若 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$=(x_2， y_2) − (x_1，y_1)= (x_2− x_1， y_2− y_1)；实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标.

（3）向量共线的两种判定方法：$\boldsymbol{a}$// $\boldsymbol{b}$（$\vec{b}\neq\vec{0}$）$\Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b} \;\;\Leftrightarrow\;\; x_1y_2-x_2y_1=0$.

4．平面向量的数量积

（1）平面向量数量积的定义：已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的夹角是θ，则数量$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$叫 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|a||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，（$0\le\theta\le\pi$）.并规定 $\boldsymbol{0}$ 与任何向量的数量积为 0.注意：两个向量的数量积是一个实数，不是向量，符号由 $\cos\theta$的符号所决定.

（2）向量的数量积的几何意义：数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上投影$|\boldsymbol{b}|\cos\theta$的乘积.

（3）两个向量的数量积的性质：

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，$\boldsymbol{e}$ 是单位向量；

1° $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$；

2° $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

3° 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$. 特别地 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$

4° $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$

5° $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

5. 平面向量的应用

（1）能用平面向量知识处理平面几何中的一些问题，如长度、角、距离，平行、垂直等问题.
（2）用向量知识把日常生活中的问题转化为数学问题，建立数学模型解决实际问题.

★学法指导

1．正确理解平面向量的有关概念

【方法点拨】平面向量的概念比较多，主要有向量的模、零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量等，要从数和形两个方面加以理解，这样才不会弄错.

【案例剖析】给出下列命题：潼

①向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 是共线向量，则 A、B、C、D 四点必在一直线上；潼

②两个单位向量是相等向量；潼
③若 **a**=**b**，**b**=**c**,则 **a**=**c**；
④若一个向量的模为 0，则该向量的方向不确定；潼
⑤若|**a**|=|**b**|,则 **a**=**b**.
⑥若 **a** 与 **b** 共线，**b** 与 **c** 共线,则 **a** 与 **c** 共线
其中正确命题的个数是（　　　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【解析】①不正确．共线向量即平行向量，只要求方向相同或相反即可，并不要求两个向量 $\overrightarrow{AB}$ 、$\overrightarrow{AC}$ 在同一直线上.

②不正确. 单位向量模均相等且为 1，但方向并不确定.

③正确. 因为 **a**=**b**，所以 **a**、**b** 的长度相等且方向相同；同理 **b**、**c** 的长度相等且方向相同，故 **a**、**c** 的长度相等且方向相同，即 **a**=**c**.

④正确. 因为零向量的方向是任意的.

⑤不正确. 向量相等还必须方向相同.

⑥不正确. 若 **a**、**c** 为两非零向量且不共线时，**b**=**0** 符合条件.综上所述，答案为 B.

【点评】：本题属于“知道”层次，考查基本概念，对于零向量、单位向量、平行向量、共线向量的概念特征及相互关系必须把握好.

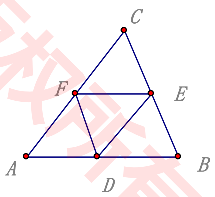
2．掌握平面向量的有关运算，提高运算能力

【方法点拨】向量加、减、数乘的结果仍是向量，而向量的数量积则是一个数量，通过向量的数量积可以计算向量的长度、两点间的距离，通过向量的夹角可以判断两个向量是否垂直，解题时要注意数量积不具有结合律.

【案例剖析】1、如图所示，D、E、F 分别是△ABC 的边 AB、BC、CA 的中点,则 $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}=$(　)

A. $\overrightarrow{FD}$　　　B. $\overrightarrow{FC}$

C. $\overrightarrow{FE}$　　　D. $\overrightarrow{BE}$



【解析】：∵ $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}$ 则 $\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DF}$，由三角形中位线定理 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BE}$，故选 D

【点评】：本题属于“理解”层次，考查考生的基本运算能力，主要是对向量减法的理解和运用，解题时利用了向量相等，创共同起点进行转化.

【案例剖析】2、若 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$ ，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为（　　）

A、30°　　　　B、60°　　　　C、120°　　　　D、150°

【解析】：∵ $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，　　$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$，

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{-1}{1\times 2}=-\dfrac{1}{2}$，　　故θ=$120^\circ$，选 C.

【点评】：本题属于“理解”层次，重点考查向量的数量积运算.要会利用向量的数量积求长度、距离和夹角；利用垂直的条件解题：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

【案例剖析】3、设 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 是两个不共线的向量，$\overrightarrow{AB}=2\vec{e_1}+k\vec{e_2},\overrightarrow{CB}=\vec{e_1}+3\vec{e_2},\overrightarrow{CD}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}$，若 A、B、D 三点共线，求 k 的值.

【解析】：$\because \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}-\left(\vec{e_1}+3\vec{e_2}\right)=\vec{e_1}-4\vec{e_2}$

若 A，B，D 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BD}$ 共线，$\therefore$ 设$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$　即 $2\vec{e_1}+k\vec{e_2}=\lambda\vec{e_1}-4\lambda\vec{e_2}$

由于 $\vec{e_1}$ 与 $\vec{e_2}$ 不共线，得：$\begin{cases}2\vec{e_1}=\lambda\vec{e_1}\\ k\vec{e_2}=-4\lambda\vec{e_2}\end{cases}$　　故 $\lambda=2,k=-8$

【点评】：本题属于“知道”层次，解答的关键是理解共线的条件：

$$\boldsymbol{a}\,//\,\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{b}\neq\vec{0})\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\quad\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$$

3、掌握平面向量的坐标运算，强化数形结合

【方法点拨】向量本身具有数与形的双重功能，另外，任何一个向量直线型图形都可表示为一些向量的线性组合，因此在解题中应充分运用数形结合的思想方法.一方面，要重视向量、模本身的几何意义；另一方面还要充分利用向量运算法则的几何意义.引入向量的坐标后，要尽可能利用坐标运算，使解题简捷、明了.

【案例剖析】凸四边形 ABCD 的边 AD、BC 的中点分别为 E、F，求证：$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}).$

【解析】：证法一：利用加、减法的几何意义.

连结 EB、EC，以 EB、EC 为邻边作平行四边形 ECGB，则 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}).$

由于 E 为 AD 的中点，$\therefore\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$，故结论成立.

证法二：创共同起点，建立向量间关系.

在平面内任取一点 O，$\because$E、F 分别为 AD、BC 的中点，$\therefore\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}),\ \overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$

$\therefore\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}\ \frac{1}{2}[(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})]=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}).$

证法三：利用坐标运算.

建立直角坐标系，设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,$D(x_4,y_4)$.　　则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，

$\overrightarrow{DC}=(x_3-x_4,y_3-y_4)$，$\therefore\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})=(\frac{x_2+x_3-x_1-x_4}{2},\frac{y_2+y_3-y_1-y_4}{2})$

又∵ $E(\frac{x_1+x_4}{2},\frac{y_1+y_4}{2})$，$F(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2})$，

∴ $\overrightarrow{EF}=(\frac{x_2+x_3-x_1-x_4}{2},\frac{y_2+y_3-y_1-y_4}{2})$，故 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

【点评】：（1）本题属于“理解”层次，考查考生的分析转化能力；（2）解题的关键是转化，不管是利用向量的线性运算还是坐标运算，都需要利用数形结合达到化归的目的.

4 重视平面向量的应用，关注学科内综合

（1）平面向量知识在平面几何中的应用

【方法点拨】（1）用向量方法解决平面几何问题的基本思路：几何问题向量化 $\Leftrightarrow$ 向量运算关系化 $\Leftrightarrow$ 向量关系几何化.

（2）用向量方法研究几何问题，需要用向量的观点看问题，将几何问题化归为向量问题来解决. 它既是一种数学思想，也是一种数学能力. 其中合理设置向量，并建立向量关系，是解决问题的关键.

【案例剖析】试证明：平行四边形对角线的平方和等于它各边的平方和.

【解析】：证明：记 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$,

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2+(\vec{a}-\vec{b})^2=2\vec{a}^2+2\vec{b}^2$$

$$\therefore\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2=2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2$$

∴平行四边形对角线的平方和等于它各边的平方和.

【点评】：本题属于“理解”中基本应用层次，考查考生对所学过的内容能进行基本应用；如何在问题中建立向量关系，充分利用向量知识是解决问题的关键

（2）平面向量与物理知识的综合应用

【方法点拨】用向量知识解决物理问题时，要注意数形结合. 一般先要作出向量示意图，必要时可建立直角坐标系，再通过解三角形或坐标运算，求有关量的值.

【案例剖析】设作用于同一点 0 的三个力、$\overrightarrow{F}_1$、$\overrightarrow{F}_2$、$\overrightarrow{F}_3$ 处于平衡状态，如果|$\overrightarrow{F}_1$|=1，|$\overrightarrow{F}_2$|=2，$\overrightarrow{F}_1$ 与 $\overrightarrow{F}_2$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$. 求①. $\overrightarrow{F}_3$ 的大小；②. ∠F$_3$0F$_2$ 的大小.

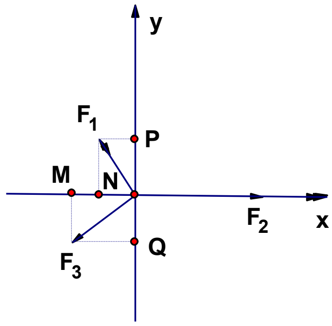
【解析】：①$\overrightarrow{F}_1$、$\overrightarrow{F}_2$、$\overrightarrow{F}_3$ 三个力处于平衡状态，故 $\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2+\overrightarrow{F}_3=\overrightarrow{O}$，即 $\overrightarrow{F}_3=-(\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2)$.

$$\therefore|\overrightarrow{F}_3|=|\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2|=\sqrt{(\vec{F}_1+\vec{F}_2)^2}=\sqrt{\vec{F}_1^{\,2}+\vec{F}_1^{\,2}+2\vec{F}_1\cdot\vec{F}_2}=\sqrt{1+4+2\times1\times2\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{3}$$

②如图：以$\vec{F}_2$所在直线为 x 轴，合力作用点为坐标原点，建立直角坐标系. 将向量$\vec{F}_1$、$\vec{F}_3$正交分解，设∠F₃OM=θ

由受力平衡知

$$\begin{cases}|\vec{F}_3|\cos\theta+|\vec{F}_1|\cos(\pi-\frac{2\pi}{3})=|\vec{F}_2|\\ |\vec{F}_3|\sin\theta=|\vec{F}_1|\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2})\end{cases}$$



解之得$\theta=\frac{\pi}{6}$，　　于是$\angle F_3OF_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$

【点评】：本题属于“理解”中综合应用层次，考查考生对所学过的知识在学科间的联系；本题的第（1）问的关键是对力的平衡向量转化：$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{O}$；第（2）问的关键是通过数形结合对力的平衡进行量化，解题时还用到了三角函数的有关知识，注重了学科内综合与联系.

★阶梯练习

A 级

1．下面的几个命题：

①若$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{b}|$ 则$\vec{a}$与$\vec{b}$共线；

②长度不等且方向相反的两向量不一定是共线向量；

③若$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|>|\vec{b}|$且$\vec{a}$与$\vec{b}$同向，则$\vec{a}>\vec{b}$；

④由于$\vec{0}$方向不定，故$\vec{0}$不能与任何向量平行；

⑤对于任意向量$\vec{a},\vec{b}$,必有$||\vec{a}|-|\vec{b}||\le|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

其中正确命题的序号是：（　　）

A. ①②③　　B. ⑤　　C. ③⑤　　D. ①⑤

2．化简$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AB}$得（　　）

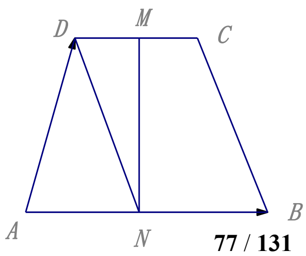
A．$\overrightarrow{AB}$　　B．$\overrightarrow{DA}$　　C．$\overrightarrow{BC}$　　D．$\vec{0}$

3．若向量$\vec{a}=(\mathbf{2}x-\mathbf{1},x^2+\mathbf{3}x-\mathbf{3})$与$\overrightarrow{AB}$相等，且 A（1，3），B（2，4），则 x 为（　　）

A．1　　B. 1 或 4　　C. 0　　D. -4

4．已知向量 $\vec{a}$=(x-5,3)，$\vec{b}$=(2,x) 且 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 则由 x 的值构成的集合是（　　）

A. $\{2,3\}$　　B. $\{-1,6\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{6\}$



5．已知 $\vec{a}=(3,0),\vec{b}=(k,5)$ 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$ ，k 的值是________.

6．把平面上一切单位向量归结到共同的始点，那么这些向量的终点所

构成的图形是＿＿＿＿＿＿＿.

7．如图，ABCD 是一个梯形，AB∥CD，且 AB=2CD，M、N 分别是 DC、AB 的中点，已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 分别表示 $\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{MN}$.

8．设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ 及 $|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{7}$

（1）求 $\vec{a},\vec{b}$ 所成角的大小.

（2）求 $|3\vec{a}+\vec{b}|$ 的值.

B 级

9．已知点 A（2，3）、B（10，5），直线 AB 上一点 P 满足|PA|=2|PB|，则 P 点坐标是（　　）

A. $\left(\frac{22}{3},\frac{13}{3}\right)$　　B. （18，7）　　C. $\left(\frac{22}{3},\frac{13}{3}\right)$或（18，7）　　D. （18，7）或（－6，1）

10．点 P 在平面上作匀速直线运动,速度向量 $\vec{v}$=(4,-3),即点 P 的运动方向与 $\vec{v}$ 相同,且每秒移动的距离为 $|\vec{v}|$ 个单位,设开始时点 P 的坐标为(-10,10),则 5 秒后 P 的坐标为(　　)

A. (-2,4)　　B. (-30,24)　　C. (10,-5)　　D. (5,-10)

11．设向量 $\vec{a}$=(2,-1)，向量 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 共线且 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$\vec{b}$ 的模为 $2\sqrt{5}$，则 $\vec{b}$ =＿＿＿＿＿＿＿.

12．已知 O（0，0），A（1，2），B（4，5）及 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

求（1）t 为何值时，P 在 X 轴上？P 在 y 轴上？P 在第二象限？

（2）四边形 OABP 能否成为平行四边形？若能，求出相应的 t 值；若不能，请说明理由.

13．.一条渔船距对岸 4km,以 2km/h 速度向垂直于对岸的方向划去，到达对岸时，船的实际航程为 8km，求河水的流速.

C 级

14．.若对 3 个向量 $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$，存在 3 个不全为 0 的实数 k_1，k_2，k_3，使得 $k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+k_3\overrightarrow{a_3}=\vec{0}$ 成立，则称向量 $\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$，$\overrightarrow{a_3}$ 为“线性相关”，按照规定的说明 $\vec{a}_1$=(1，0)，$\vec{a}_2$=(1，-1)，$\vec{a}_3$=(2，3)这三个向量“线性相关”的实数 k_1，k_2，k_3 可能的取值为（　）

A. -5，3，1　　B. 5，3，1　　C. -5，1，3　　D. -5，1，-3

15．已知 $\vec{a}=\left(\sqrt{3},-1\right),\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，且存在实数 k 和 t，使得 $\vec{x}=\vec{a}+\left(t^2-3\right)\vec{b},\vec{y}=-k\vec{a}+t\vec{b}$ 且 $\vec{x}\perp\vec{y}$，试求 $\frac{k+t^2}{t}$ 的最小值

第三章　三角恒等变换

★学习目标

节　次	学　习　目　标
两角和与差的正弦、余弦和正切公式	理解两角和与差的正弦、余弦、正切公式， 理解二倍角的正弦、余弦、正切公式.
简单的三角恒等变换	理解运用相关公式进行简单的三角恒等变换.

★要点解读

本章主干知识：两角和与差的正弦、余弦和正切公式，运用相关公式进行简单的三角恒等变换.

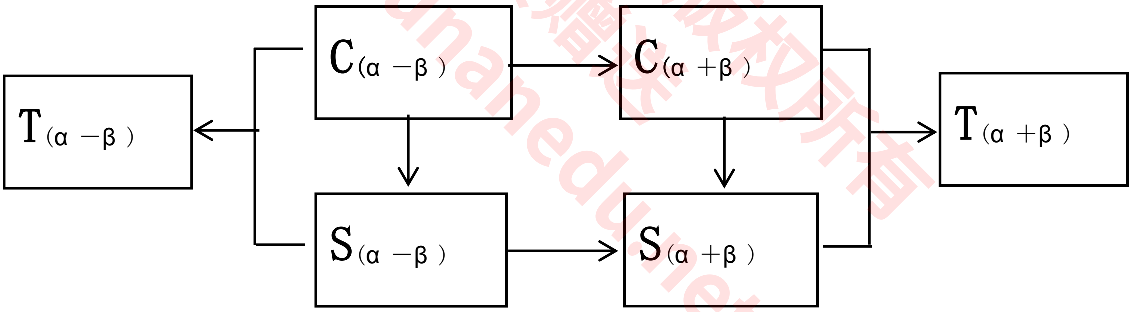
1．两角和与差的正弦、余弦和正切公式

两角和与差的正弦、余弦和正切公式如下：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\ ;\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\ ;$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

对正切的和角公式有其变形：$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$，有时应用该公式比较方便. 这 6 个公式的联系为：



2．二倍角的正弦、余弦、正切公式

二倍角的正弦、余弦、正切公式如下：

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha.\qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

要熟悉余弦“倍角”与“二次”的关系（升角—降次，降角—升次）. 特别注意公式的三角表达形式，且要善于变形， $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，　$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ 这两个形式常用.

3．简单的三角恒等变换

（1）变换对象：角、名称和形式，三角变换只变其形，不变其质.

（2）变换目标：利用公式简化三角函数式，达到化简、计算或证明的目的.

（3）变换依据：两角和与差的正弦、余弦、正切公式和二倍角的正弦、余弦、正切公式.

（4）变换思路：明确变换目标，选择变换公式，设计变换途径.

★学法指导

1．熟悉三角函数公式，从公式的内在联系上寻找切入点

【方法点拨】三角函数中出现的公式较多，要从角名称、结构上弄清它们之间的内在联系，做到真正的理解、记熟、用活.解决问题时究竟使用哪个公式，要抓住问题的实质，善于联想，灵活运用.

【案例剖析】设 $a=\frac{1}{2}\cos 6^{\circ}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6^{\circ}, b=\frac{2\tan 13^{\circ}}{1+\tan^2 13^{\circ}}, c=\sqrt{\frac{1-\cos 50^{\circ}}{2}}$，则有（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a<b<c$　　C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

【解析】：由于 $a=\sin 30^{0}\cos 6^{\circ}-\cos 30^{0}\sin 6^{\circ}=\sin 24^{0}, b=\sin 26^{0}, c=\sin 25^{0}$，故选 C.

【点评】：本题属于“理解”层次，要能善于正用、逆用、变用公式.例如：：$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$，$\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$，$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$，$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\tan 2\alpha$，$1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$，$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$，$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$，$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$等.另外，三角函数式 asinx+bcosx 是基本三角函数式之一，引进辅助角，将它化为 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$ 即 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$（其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$）是常用转化手段.特别是与特殊角有关的 sin±cosx，±sinx±$\sqrt{3}$cosx，要熟练掌握其变形结论.

2．明确三角恒等变换的目的，从数学思想方法上寻找突破口

三角恒等变换是三角函数与平面向量这两章的延续与发展，三角变换只变其形，不变其质，它可以揭示有些外形不同但实质相同的三角函数式之间的内在联系，帮助我们达到三角恒等变换的目的.

（1）运用转化与化归思想，实现三角恒等变换`

【方法点拨】教材中两角和与差的正、余弦公式以及二倍角公式的推导都体现了转化与化归的思想，应用该思想能有效解决三角函数式化简、求值、证明中角、名称、形式的变换问题.

【案例剖析】1．　已知 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

【解析】：由于 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，可得到 $\pi<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$，$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{4}$.

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$.

$\therefore \sin 2\alpha=\sin[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=(-\frac{3}{5})\cdot\frac{12}{13}+(-\frac{4}{5})\cdot\frac{5}{13}=-\frac{56}{65}$.

【点评】：本题属于“理解”层次，解答的关键在于分析角的特点，将 2α 表示为 $2\alpha=(\alpha-\beta)+$

（$\alpha+\beta$）.

【案例剖析】2．化简：［2sin50°+sin10°（1+$\sqrt{3}$ tan10°）］$\cdot\sqrt{\sin^2 80°}$.

【解析】：原式=［2sin50°+sin10°（1+$\sqrt{3}\dfrac{\sin 10°}{\cos 10°}$）］$\cdot\sqrt{\cos^2 10°}$

$$=[2\sin50°+\sin10°\left(\frac{\cos10°+\sqrt{3}\sin10°}{\cos10°}\right)]\cdot\sqrt{\cos^2 10°}$$

$$=\left(2\sin50°+2\sin10°\cdot\frac{\cos50°}{\cos10°}\right)\cdot\cos10°$$

$$=2(\sin50°\cos10°+\sin10°\cdot\cos50°)$$

$$=2\sin60°=\sqrt{3}.$$

【点评】：本题属于“理解”层次，解题的关键在于灵活运用“化切为弦”的方法，再利用两角和与差的三角函数关系式整理化简. 化简时要求使三角函数式成为最简：项数尽量少，名称尽量少，次数尽量底，分母尽量不含三角函数，根号内尽量不含三角函数，能求值的尽量求出值来.

（2）运用函数方程思想，实现三角恒等变换

【方法点拨】三角函数也是函数中的一种，其变换的实质仍是函数的变换. 因此，有时在三角恒等变换中，可以把某个三角函数式看作未知数，利用条件或公式列出关于未知数的方程求解.

【案例剖析】：已知 sin（$\alpha+\beta$）$=\dfrac{2}{3}$，sin（$\alpha-\beta$）$=\dfrac{3}{4}$，求 $\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta}{\tan^2\beta\cdot\tan(\alpha+\beta)}$ 的值. .

【解析】：由 $\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{3}\\ \sin(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{2}{3}\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{4}\end{cases}$、

解得 $\begin{cases}\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{17}{24}\\ \cos\alpha\cdot\sin\beta=-\dfrac{1}{24}\end{cases}$，

$$\therefore\ \frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha-\tan\beta}{\tan^2\beta\cdot\tan(\alpha+\beta)}=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\cdot\tan\beta)}{\tan^2\alpha\cdot\tan(\alpha+\beta)}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}=-17.$$

【点评】：本题属于“理解”层次，考查学生对所学过的内容能进行理性分析，善于利用题中的条件运用方程思想达到求值的目的.

（3）运用换元思想，实现三角恒等变换

【方法点拨】换元的目的就是为了化繁为简，促使未知向已知转化，可以利用特定的关系，把某个式子用新元表示，实行变量替换，从而顺利求解，解题时要特别注意新元的范围.

【案例剖析】：若$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求$\cos\alpha+\cos\beta$的取值范围.

【解析】：令$\cos\alpha+\cos\beta=t$，则$(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=t^2+\dfrac{1}{2}$，

即$2+2\cos(\alpha-\beta)=t^2+\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2\cos(\alpha-\beta)=t^2-\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ -2\le t^2-\dfrac{3}{2}\le 2,\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le t^2\le\dfrac{7}{2},\therefore -\dfrac{\sqrt{14}}{2}\le t\le\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，即$-\dfrac{\sqrt{14}}{2}\le\cos\alpha+\cos\beta\le\dfrac{\sqrt{14}}{2}$

【点评】：本题属于“理解”层次，解题的关键是将要求的式子$\cos\alpha+\cos\beta$看作一个整体，通过代数、三角变换等手段求出取值范围.

3．关注三角函数在学科内的综合，从知识联系上寻找结合点

【方法点拨】三角函数在学科内的联系比较广泛，主要体现在与函数、平面向量、解析几何等知识的联系与综合，特别是与平面向量的综合，要适当注意知识间的联系与整合.

【案例剖析】：已知：向量$\vec{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\vec{b}=(\sin 2x,\ \cos 2x)$，函数$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$

（1）若$f(x)=0$且$0<x<\pi$，求x的值；

（2）求函数$f(x)$取得最大值时，向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.

【解析】：$\because\ f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

（1）由$f(x)=0$得$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=0$即$\tan 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\because 0<x<\pi,\qquad \therefore 0<2x<2\pi\qquad \therefore 2x=\dfrac{\pi}{6}$，或$2x=\dfrac{7\pi}{6}$，$\qquad\therefore x=\dfrac{\pi}{12}$或$\dfrac{7\pi}{12}$

（2）$\because\ f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x)$

$=2(\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos 2x\sin\dfrac{\pi}{6})=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$

$\therefore f(x)_{\max}=2$，当$f(x)=2$时，由$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=2$

得$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=1$，$\because 0\le<\vec{a},\vec{b}>\le\pi\qquad\therefore<\vec{a},\vec{b}>=0$

【点评】：本题属于“理解”中综合应用层次，主要考查应用平面向量、三角函数知识的分析和计算能力.

★阶梯练习

A 级

1．sin165º= （　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　D．$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2．sin14ºcos16º+sin76ºcos74º 的值是（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

3．已知$x\in(-\frac{\pi}{2},0)$，$\cos x=\frac{4}{5}$，则$\tan 2x=$（　　）

A．$\frac{7}{24}$　　B．$-\frac{7}{24}$　　C．$\frac{24}{7}$　　D．$-\frac{24}{7}$

4．化简 2sin（$\frac{\pi}{4}$－x）·sin（$\frac{\pi}{4}$+x），其结果是（　　）

A．sin2x　　B．cos2x　　C．－cos2x　　D．－sin2x

5．$\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=$________.

6．$\frac{1-\tan 15^\circ}{1+\tan 15^\circ}=$________

7．求证：$\frac{\cos^2\theta}{\cot\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{4}\sin 2\theta$.

8．已知$\tan 2\alpha=\frac{1}{3}$，求$\tan\alpha$的值.

B 级

9．$\sin\frac{\pi}{12}-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{12}$的值是 （　　）

A．0　　B．$-\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$2\sin\frac{5\pi}{12}$

10．$\frac{1-\tan^2 75^\circ}{\tan 75^\circ}$的值为 （　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$-2\sqrt{3}$　　D．$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

11． $\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\tan 40^\circ$ 的值是________.

12．已知 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$, $\sin(\dfrac{\pi}{4}-x)=\dfrac{5}{13}$, 求 $\dfrac{\cos 2x}{\cos(\dfrac{\pi}{4}+x)}$ 的值.

13．若 $A\in(0,\pi)$,且 $\sin A+\cos A=\dfrac{7}{13}$，求 $\dfrac{5\sin A+4\cos A}{15\sin A-7\cos A}$ 的值.

C 级

14．若 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$， $\sin\dfrac{\theta}{2}=-\dfrac{4}{5}$，则角 θ 的终边一定落在直线（　　）上.

A． $7x+24y=0$　　B． $7x-24y=0$　　C． $24x+7y=0$　　D． $24x-7y=0$

15．设 $f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x(\omega>0)$ 的周期为 $T=\pi$,最大值 $f(\dfrac{\pi}{12})=4$.

(1) 求 ω,a,b 的值;

(2) 若 α,β 为方程 $f(x)=0$ 的两根,且 α,β 的终边不共线,求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

数学 4 检测卷

本试题包括选择题、填空题和解答题三部分.时量 120 分钟.满分 100 分

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案的代号填在题后的括号内.）

1、已知角α的终边经过点 $P(-3,4)$，则 $\sin\alpha$ 的值等于（　　）

A、$-\dfrac{3}{5}$　　B、$\dfrac{3}{5}$　　C、$\dfrac{4}{5}$　　D、$-\dfrac{4}{5}$

2、已知 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，那么 α 的终边所在的象限为（　　）

A、第一象限　B、第二象限　C、第三象限　D、第四象限

3、设 $\vec{a}=(\dfrac{3}{2},\sin\alpha)$，$\vec{b}=\left(\cos\alpha,\dfrac{1}{3}\right)$，且 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则锐角 α 为（　　）

A、$30°$　　B、$60°$　　C、$45°$　　D、$75°$

4、已知 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是（　　）

A、150°　　B、120°　　C、60°　　D、30°

5、下列命题正确的个数是（　　）

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$；　② $\vec{0}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{0}$；　③ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$；　④ $0\cdot\overrightarrow{AB}=0$

A、1　　B、2　　C、3　　D、4

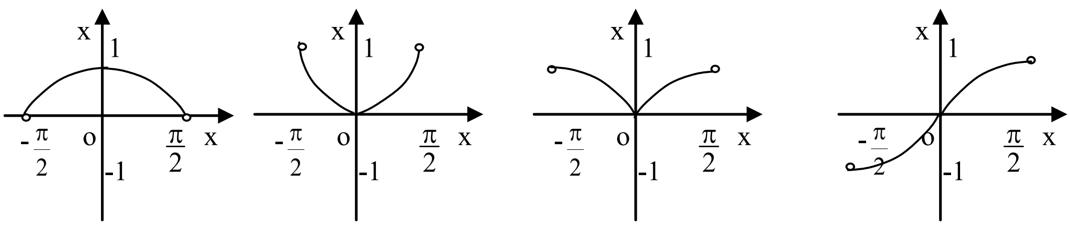
6、已知 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，且 $(\vec{a}+k\vec{b})\perp(\vec{a}-k\vec{b})$，则 k 等于（　　）

A、$\pm\dfrac{4}{3}$　　B、$\pm\dfrac{3}{4}$　　C、$\pm\dfrac{3}{5}$　　D、$\pm\dfrac{4}{5}$

7、下列各式中值等于 $\dfrac{1}{2}$ 的是（　　）

A、$\sin 15^\circ\cos 15^\circ$　　B、$\dfrac{\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$　　C、$\cos^2\dfrac{\pi}{12}-\sin^2\dfrac{\pi}{12}$　　D、$\sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{3}}{2}}$

8、函数 $y=\cos x|\tan x|$ $(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2})$ 的大致图象是（　　）



A　　B　　C　　D

9、把函数 $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到的函数解析式为（　　）

A、$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$　　B、$y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　　C、$y=\cos 2x$　　D、$y=-\sin 2x$

10、已知 $\cos(\pi+\alpha)=\frac{1}{3}$，$\pi<\alpha<2\pi$，则 $\sin 2\alpha$ 的值是（　　）

A、$\frac{1}{2}$　　B、$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C、$\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　D、$\frac{2\sqrt{2}}{9}$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分. 把答案填在题中横线上.）

11、$\cos 36^\circ\cos 6^\circ+\sin 36^\circ\sin 6^\circ$=_________ .

12、$\tan 19^0+\tan 41^0+\sqrt{3}\tan 19^0\tan 41^0=$______________________.

13、已知点 $A(1,2)$，点 $B(4,5)$，若 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则点 P 的坐标是_________ .

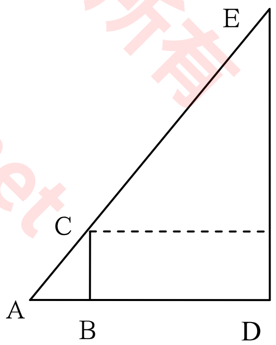
14、已知 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin 91^\circ=0$，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos 91^\circ=0$，

则 $\cos(\alpha-\beta)$=_______.

15、已知 $|\vec{a}|=8$，$\vec{e}$ 是单位向量，当它们之间的夹角为 $\frac{\pi}{3}$ 时，$\vec{a}$ 在 $\vec{e}$ 方向上的投影为_________.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 40 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16、（本小题满分 6 分）如图，已知 $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DE}=4\overrightarrow{BC}$，试判断 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 是否共线



17、（本小题满分 6 分）已知点 B(1,0)是向量 $\vec{a}$ 的终点,向量 $\vec{b}$,$\vec{c}$ 均为以原点 O 为起点,且

$\vec{b}=(-3,4),\vec{c}=(-1,1)$ 并与向量 $\vec{a}$ 的关系为 $\vec{a}=3\vec{b}-2\vec{c}$,求向量 $\vec{a}$ 的起点坐标

18、（本小题满分 8 分）已知$\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

求 (1) $\sin\theta\cdot\cos\theta$；　(2) $\sin\theta-\cos\theta$

19、（本小题满分 10 分）已知α，β都是锐角，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{13}$，求$\sin\beta$的值

20、（本小题满分 10 分）已知O为坐标原点，$\overrightarrow{OA}=(2\cos^2 x,1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{3}\sin 2x+a)$（$x\in R,a\in R$，$a$是常数），若$y=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

（1）求y关于x的函数关系式$f(x)$；

（2）若$f(x)$的最大值为2，求a的值；

（3）利用（2）的结论，用“五点法”作出函数$f(x)$在长度为一个周期的闭区间上的简图，并指出其单调区间.

数学 5：

第一章　　解三角形

★学习目标

节　　次	学习目标
正弦定理和余弦定理	理解正弦定理和余弦定理，应用正弦定理和余弦定理解决有关三角形的问题
应用举例	应用正弦定理和余弦定理解决有关距离、高度、角度、几何计算等实际问题

★要点解读

本章主干知识：正弦定理、余弦定理的理解及其应用.

1、正弦定理及其应用

（1）正弦定理：在一个三角形中，各边和它所对角的正弦值的比相等，即 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$=2R .

（2）一般地，把三角形的三个角 A、B、C 和它的对边 a、b、c 叫做三角形的元素，已知三角形的几个元素，求其它元素的过程叫做解三角形.

（3）应用正弦定理可以解决两类解三角形问题：①已知两角和任一边，求其它两边和一角；②已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角.此类问题要注意解的情况，可能有三种结果：两解、一解、无解.

2、余弦定理及其应用

（1）余弦定理：

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦值的积的两倍，即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \qquad （Ⅰ）$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

余弦定理还可以写成另一种形式，即

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \qquad （Ⅱ）$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

（1）余弦定理的三个等式具有轮换的特点，勾股定理是余弦定理的特例，余弦定理是勾股定理的推广.

⑵应用余弦定理可以解决两类解三角形的问题:①已知三边，求各角，利用（Ⅱ）通常先求两个较小边所对的角，因为较小的边所对的角一定是锐角；②已知两边和它们的夹角，利用（Ⅰ）式来求第三边.

（3）应用正弦定理和余弦定理解决有关的实际问题

解三角形应用题的基本思路为：实际问题 $\xrightarrow{\text{作图}}$ 数学问题 $\xrightarrow{\text{解三角形}}$ 数学问题的解 $\xrightarrow{\text{检验}}$ 实际问题的解.

★学法指导

1、正确选用正弦定理和内角和定理解三角形.

[方法点拨]已知一边和两角，或已知两边及其中一边的对角可用正弦定理和内角和定理，求其它的边和角.

[案例剖析]在△ABC 中，已知 a=20cm　b=11cm　$B=30^0$,解三角形（角度精确到 1^0，边长精确到 1cm）.

[解析]根据正弦定理 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{20\sin 30^0}{11}\approx 0.9091$

因为 $0^0<A<180^0$，所以 $A\approx 65^0$，或 $A\approx 115^0$

(1)当 $A\approx 65^0$ 时

$C=180^0-(A+B)\approx 180^0-(65^0+30^0)=85^0$,

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{11\sin 85^0}{\sin 30^0}\approx 22(cm)$.

（2）当 $A\approx 115^0$ 时，

$C=180^0-(A+B)\approx 180^0-(115^0+30^0)=35^0$

$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{11\sin 35^0}{\sin 30^0}\approx 13(cm)$.

[点评]本题属于理解层次，能正确应用正弦定理和内角和定理解三角形；若α，β∈(0，π)，sinα=sinβ，则α=β 或α+β=π，所以要注意解的情况.

2、正确选用余弦定理，正弦定理和内角和定理解三解形.

[方法点拨]已知三边，解三角形常先用余弦定理求出一角，另外两角可用正弦定理（或余弦定理）和内角和定理求解；已知两边及夹角，先用余弦定理求出第三边，再用正弦定理和内角和定理求其它边角.

[案例剖析]在△ABC 中，已知下列条件，解三角形（角度精确到 1^0，边长精确到 1cm)；

（1）a=7cm，b=10cm，c=6cm；

（2）b=60cm，c=34cm，$A=41^0$

[解析]（1）由余弦定理的推论得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{87}{120}=0.725,\ A\approx 44^0$;

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{113}{140}\approx 0.8071,\ C\approx 36^0$;

$B=180^0-(A+C)\approx 180^0-(44^0+36^0)=100^0$.

（2）因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=60^2+34^2-2\times60\times34\times\cos41^0$

$\approx3600+1156-4080\times0.7547$

≈1676.82

所以 $a\approx41$(cm)

因为 $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}\approx\dfrac{34\times\sin41^0}{41}\approx\dfrac{34\times0.6561}{41}\approx0.5441$

又因为 c 不是三角形中最大的边，所以 C 是锐角，所以 $C\approx33^0$，

$B=180^0-(A+C)\approx180^0-(41^0+33^0)=106^0$.

[点评]本题属于理解层次，能正确应用余弦定理，正弦定理和内角和定理解三角形，在第（1）小题中求 A 之后也可用正弦定理求解，不过要接着求 C，与第（2）题一样，因为 c 不是最大边，所以 C 为锐角，这样就可以避免讨论.

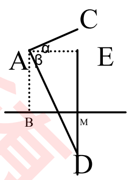
3、将应用解三角形知识解决实际问题程序化

[方法点拨]应用解三角形知识解决实际问题的步骤：（1）准确理解题意，尤其理解应用中的有关名词和术语，如坡度、仰角、俯角、方位角、铅直平面等；（2）画出示意图，将已知条件在图形中标出；（3）将实际问题化归到一个或几个三角形中；（4）合理选用正弦定理和余弦定理求解，并作答.

[案例剖析]在湖面上高 hm 处，测得云的仰角为α，而湖中云之影（即云在湖中的像）的俯角为β，试证：云高为 $h\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}m$.

[解析]画出示意图，设湖面上高 hm 处为 A，测得云 C 的仰角为α，而 C 在湖中的像 D 的俯角为β，CD 与湖面交于 M，过 A 的水平线交 CD 于 E，设云高 CM=x，则 CE=x-h，

DE=x+h，AE=$\dfrac{x-h}{\tan\alpha}$，又 AE=$\dfrac{x+h}{\tan\beta}$，



所以 $\dfrac{x-h}{\tan\alpha}=\dfrac{x+h}{\tan\beta}$，解得 x=$\dfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}\cdot h=h\cdot\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\beta-\alpha)}(m)$

[点评]本题属于应用层次，要求正确理解题意，将实际问题抽象为数学问题求解.解答好本题的关键是理解仰角和俯角的概念，仰角与俯角都在同一竖直平面内，视线与水平线的夹角，当视线在水平线之上时，称为仰角，当视线在水平线之下的称为俯角.

★阶梯练习

A　　级

1、在△ABC 中，a=7，c=5，则 sinA：sinC 的值是（　　）

A、$\dfrac{5}{7}$　　B、$\dfrac{7}{5}$　　C、$\dfrac{7}{12}$　　D、$\dfrac{5}{12}$

2、在△ABC 中，已知 $a^2=b^2+c^2-bc$，则角 A 为（　　）

A、$\dfrac{\pi}{6}$　　B、$\dfrac{\pi}{3}$　　C、$\dfrac{2\pi}{3}$　　D、$\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$

3、在△ABC 中，已知 a=8，$B=60^0$，$C=75^0$，则 b=（　　）

A、$4\sqrt{2}$　　B、$4\sqrt{3}$　　C、$4\sqrt{6}$　　D、$\dfrac{32}{3}$

4、在△ABC 中，已知 a=5，b=7，$A=30^0$，则△ABC 有（　　）

A、一解　　　　　B、二解　　　　　C、无解　　　　　　D、不能确定

5、在△ABC 中，已知 b=1，c=3，A=60^0，则 $S_{\triangle ABC}$=________________.

6、在△ABC 中，已知 a=6，　b=8，C=60^0，则 c=______________.

7、在△ABC 中，已知 a=10，B=60^0,C=45^0，解三角形.

8、在△ABC 中，已知 a=8，b=7，c=3，解三角形（精确到 1^0）

B　　级

9、已知两座灯塔 A 和 B 与海洋观察站 C 点距离都是α km，灯塔 A 在观察站 C 的北偏东 20^0，灯塔 B 在观察站 C 的南偏东 40^0，则灯塔 A 与 B 的距离为（　　）

A、α km　　　　B、$\sqrt{3}$α km　　　　C、$\sqrt{2}$α km　　　　D、2α km

10、飞机在空中沿水平方向飞行，在 A 处测得正前下方地面目标 C 的俯角为 30^0，向前飞行 10000 米到 B 处，测得正前下方地面目标 C 的俯角为 60^0，则飞机的高度为（　　）

A、5000 米　　　　B、5000$\sqrt{2}$ 米　　　　C、5000$\sqrt{3}$ 米　　　　D、10000 米

11、某人向正东方向走了 4 千米后向右转了一定的角度，然后沿新方向直走了 3 千米，此时离出发地恰好为 $\sqrt{37}$ 千米，则此人右转的角度是________.

12、在△ABC 中，若 a^2tanB=b^2tanA,试判定这个三角形的形状.

13、在四边形 ABCD 中，BC=a，DC=2a,四个角 A、B、C、D 度数之比是 3：7：4：10，求 AB 的长.

C　　级

14、在△ABC 中，边 a、b 的长是方程 x^2-5x+2=0 的两个根，C=120^0,则边 c=_______.

15、某人在 C 点测得塔顶 A 在南偏西 80^0，仰角为 45^0，此人沿着南偏东 40^0 方向前进 10 米到 O 点，测得塔顶的仰角为 30^0，试求塔的高度.

第二章　　数列

★学习目标

节次	学习目标
数列的概念与简单表示法	知道数列的概念与简单表示法
等差数列	了解等差数列,公差、等差中项等概念，理解等差数列的通项公式
等差数列的前 n 项和	理解等差数列的前 n 项和公式，关注数列方法的应用
等比数列	了解等比数列，公比、等比中项等概念，理解等比数列的通项公式
等比数列的前 n 项和	理解等比数列的前 n 项和公式，关注数列方法的应用

★要点解读

本章主干知识：等差、等比数列的概念，通项公式，前 n 项和公式，数列方法的应用.

1、数列的概念与简单表示法.

（1）对数列概念的理解

①数列是按一定次序排列的一列数，这就揭示了构成数列的一列数的次序性.

②凡是按一定次序排列的数，都是数列，因此，确定数列有以下几种主要形式：给出了数列的各项；给定数列的通项公式；给定数列的前 n 项和；给定数列的递推公式.

③数列就是定义域为自然数集 N※（或它的有限子集{1、2……n}）上的函数，当自变量从小到大依次取值时的一列函数值，这不仅说明了数列的特定函数意义（定义域的特殊性以及函数值的次序性），还表明我们在研究某些数列问题时，应该借助于函数的知识和方法来解决（如数列的分类）这些数列问题.

（2）数列的表示方法有五种:①解析法(即用通项公式表示)；②列表法；③图象法；④递推公式法；⑤前 n 项和法.

2、等差数列

（1）通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$，另外 $a_n=a_m+(n-m)d$ 反映了等差数列中任意两项的关系.

（2）常见的判定方法：

①$a_{n+1}-a_n=d$(常数)<=>$\{a_n\}$是等差数列；

②$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$($n\in N^※$) <=>$\{a_n\}$是等差数列；

③$a_n=kn+b$(k、b 为常数) <=>$\{a_n\}$是等差数列.

（3）等差中项：若 a、A、b 成等差数列，则 A 叫做 a 与 b 的等差中项，且 $A=\frac{a+b}{2}$.

（4）常用性质

若$\{a_n\}$是公差为 d 的等差数列.

①若 d＞0，则$\{a_n\}$是递增数列，若 d＜0，则$\{a_n\}$是递减数列，若 d=0,则$\{a_n\}$是常数列.

②$d=\frac{a_n-a_1}{n-1}=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ (m、$n\in N^※$)

③若 m+n=p+q(m、n、p、q∈N※)，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$

④等差数列中间隔相同的项仍成等差数列

⑤若$\{a_n\}$是等差数列，则 s_n、$s_{2n}-s_n$、$s_{3n}-s_{2n}$、…仍成等差数列且公差为 n^2d

（5）前 n 项和公式

①$s_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$；　②$s_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$；

3、等比数列：

（1）通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$，另外 $a_n=a_mq^{n-m}$反映了等比数列中任意两项的关系.

（2）常见的判定方法

①$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$（q 为常数）或$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\geq 2$，n∈N※，q 常数）<=>$\{a_n\}$是等比数列.

②$a^2_{n+1}=a_na_{n+2}$（n∈N※，$a_n\neq 0$）<=>$\{a_n\}$是等比数列.

（3）等比中项

若 a、G、b 成等比数列，则 G 叫做 a 与 b 的等比中项，且 G=±$\sqrt{ab}$.

（4）常用性质

若$\{a_n\}$是公比为 q 的等比数列.

①若 m+n=p+q（m、n、p、q∈N^{*}），则 $a_n\cdot a_n=a_p\cdot a_q$；

②等比数列中间隔相同的项仍组成等比数列.

③若$\{a_n\}$是等比数列，则 s_n、$s_{2n}-s_n$、$s_{3n}-s_{2n}$…仍成等比数列，且公比为 q^n.（当 $s_n\neq 0$ 时）

（5）前 n 项和公式

$$s_n=\begin{cases} na_1, & (q=1) \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1)\end{cases}$$

★学法指导

1、应用算法思想，求数列的通项公式，

[方法点拨]通项 a_n 的求法一般有:(1)观察法;(2)公式法:若$\{a_n\}$是等差数列,则 $a_n=a_1+(n-1)d$ 或 $a_n=a_m+(n-m)d$；若$\{a_n\}$是等比例，则 $a_n=a_1q^{n-1}$或 $a_n=a_mq^{n-m}$.（3）利用前 n 项和：

$$a_n=\begin{cases} s_1 & (n=1) \\ s_n-s_{n-1} & (n\geq 2)\end{cases}$$，（注意能否合并）.

[案例剖析]

（1）写出数列的一个通项公式使它的前 n 项分别是下列各数

①3、5、9、17；②3、6、10、15；③-1、$\dfrac{4}{3}$、-2、$\dfrac{16}{5}$；

（2）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $s_n=2n^2-3n$，求 a_n.

[解析]（1）①联想数列:2、4、8、16，…可得 $a_n=2^n+1$

②因为 $a_1=1+2$，$a_2=1+2+3$，$a_3=1+2+3+4$，$a_4=1+2+3+4+5$，所以 $a_n=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

③因为 $a_1=(-1)^1\cdot\dfrac{2}{2}$，$a_2=(-1)^2\cdot\dfrac{4}{3}$，$a_3=(-1)^3\cdot\dfrac{8}{4}$，$a_4=(-1)^4\cdot\dfrac{16}{5}$，所以

$a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{2^n}{n+1}$

(2) $a_1=s_1=-1$；当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=s_n-s_{n-1}=2n^2-3n-2(n-1)^2+3(n-1)=4n-5$，因为 a_1 也适合，所以 $n\geqslant2$ 时 $a_n=4n-5$.

[点评]本题属于知道层次，要求学生会观察、归纳、能整体思考问题.观察常从以下几个方面入手：与常见数列间的联系；相邻两项的变化特征；分式分子分母的独立，统一特征，各项的符号特征等等.已知 s_n 求 a_n，要先分 n=1 和 $n\geqslant2$ 两种情况分别计算，然后验证两种情况能否统一.

2、巧设等差（比）数列

[方法点拨]若三个数成等差（比）数列，则可设为 a-d，a，a+d（$\dfrac{a}{q},a,aq$）；若四个数成等差（比）数列，则可设为 a-3d，a-d，a+d，a+3d（$\dfrac{a}{q^3},\dfrac{a}{q},aq,aq^3$）.

[案例剖析]有四个数，其中前三个数成等数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四个数的和为 16，第二个数与第三个数的和为 12，求这四个数.

[解析]设这四个数依次为 a-d，a，a+d，$\dfrac{(a+d)^2}{a}$

则 $\begin{cases}(a-d)+\dfrac{(a+d)^2}{a}=16\\ a+(a+d)=12\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4\\ d=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=9\\ d=-6\end{cases}$

所以这四个数分别为 0、4、8、16 或 15、9、3、1

[点评]本题属应用层次，关注数列方法的应用，这四个数还可设为 $\dfrac{2a}{q}-a,\dfrac{a}{q},a,aq$ 或 x，y，12-y，16-x.

3、应用方程（组）思想，整体思想求解“知三求二”问题

[方法点拨]等差（比）数列中，a_1，a_n，n，d(q)，s_n“知三求二”的求解，体现了方程思想，整体思想.

[案例剖析]在等差数列{ a_n }，已知 $a_1=\dfrac{5}{6}$，$d=-\dfrac{1}{6}$，$s_n=-5$，求 n 及 a_n.

[解析]因为 $s_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，所以 $\dfrac{5}{6}n+\dfrac{n(n-1)}{2}\times(-\dfrac{1}{6})=-5$

解得 n=15 或 n=-4(舍去)，由 $a_n=a_1+(n-1)d=-\dfrac{1}{6}n+1$，得 $a_{15}=-\dfrac{3}{2}$

[点评]本题属理解层次，要求学生正确理解等差数列的通项公式，前 n 项和公式，列方程求解.

4、关于数列的求和问题

[方法点拨]数列求和的基本方法有：公式法，倒序相加法（见等差数列前 n 项和公式的推导）错位相减法（见等比数列前 n 项和公式的推导），裂项相消法.

[案例剖析]求和：（1）$s_n=1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+\ldots+(2n-1)\frac{1}{2^n}$

（2）$s_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

[解析]（1）$s_n=[1+3+5\ldots+(2n-1)]+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n})=n^2+1-(\frac{1}{2})^n$

（2）因为$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

所以$s_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

[点评]本题属应用层次，关注数列方法的应用，求和的关键是研究通项，根据通项的特点，选用相应的方法

5、应用不等式思想，函数思想，数形结合思想解决等差数列前 n 项和的最值问题.

[方法点拨]解决等差数列前 n 项和的最值问题的常用方法：（1）基本量法：当 $a_1>0$，$d<0$ 时，n 为使 $a_n\geqslant0$ 且 $a_{n+1}\leqslant0$ 的正整数时，s_n取得最大值；当 $a_1<0$，$d>0$ 时，n 为使 $a_n\leqslant0$ 且 $a_{n+1}\geqslant0$ 的正整数时，s_n取得最小值.（2）二次函数法：用求二次函数的最值的方法来求其前 n 项和的最值，注意 $n\in N^{※}$；（3）图象法：利用二次函数图象的对称性来确定 n 的值，使 s_n取得最值.

[案例剖析]已知等差数列$5,4\frac{2}{7},3\frac{4}{7},\ldots$的前 n 项和为 s_n，求使得 s_n最大的序号 n 的值.

[解析]$a_n=5+(n-1)\times(-\frac{5}{7})=-\frac{5}{7}n+\frac{40}{7},a_1>0,d<0$

由$\begin{cases}-\frac{5}{7}n+\frac{40}{7}\geq0\\-\frac{5}{7}(n+1)+\frac{40}{7}\leq0\end{cases}$得 $7\leqslant n\leqslant8$，所以当 n=7 或 8 时，s_n最大.

[点评]本题属应用层次，要求学生能在数学思想的指导下确立解决问题的方法，本题的另两种解法见教材数学五第 45 页例 4.

★阶梯练习

A　　级

1、在数列 1，1，2，3，5，x，13，21，34，55 中的，x 等于（　　）

A、5　　B、7　　C、8　　D、11

2、等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1+a_4+a_7=39$, 则 a_4=(　　)

A、13　　B、14　　C、15　　D、16

3、等比数列$\{a_n\}$中，已知，$a_2=9$，公比 q 为 3，则 a_4=(　　)

A、27　　B、81　　C、243　　D、192

4、$\sqrt{2}+1$与$\sqrt{2}-1$的等差中项是（　　）

A、1　　　　　　B、-1　　　　　C、$\sqrt{2}$　　　　　D、± 1

5、等差数列{a_n}中，$a_3=3$，$a_8=33$，则{a_n}的公差为________.

6、2 与 8 的等比中项为____________.

7、等差数列{a_n}中，$a_1=1$，$a_3+a_5=14$,前 n 项和 $s_n=100$,求 n.

8、在等差数列{a_n}中，$a_1=20$,$a_n=54$，$s_n=999$,求 d 及 n.

B　　级

9、公差不为 0 的等差数列的第二、三、六项构成等比数列，则公比为（　　）

A、1　　　　　　B、2　　　　　C、3　　　　　D、4

10、$\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=$（　　　）

A、$\frac{n}{3n+1}$　　　B、$\frac{n+1}{3n+1}$　　　C、$\frac{2n-1}{3n+1}$　　D $\frac{2n-2}{3n+1}$

11、设 $f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$ 利用推导等差数列前 n 项和公式的方法，可得：f（-5）+f（-4）+…+f（0）+…f（5）+f（6）的值为______.

12、已知三个数成等差数列，它们的和等于 18，它们的平方和等于 16，求这三个数.

13、在等比数列{a_n}中，若 $a_6-a_4=216$,$a_3-a_1=8$,$s_n=13$，求 q，a_1 及 n.

C　　级

14、已知 $a_n=4(\frac{1}{3})^{n-4}$，n∈N※，则数列{$\lg a_n$}前____项和最大.

15、求和 $1+3a+5a^2+\cdots+(2n-1)a^{n-1}$

第三章　不等式

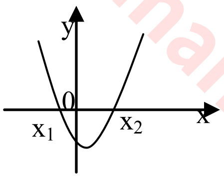
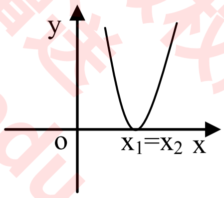
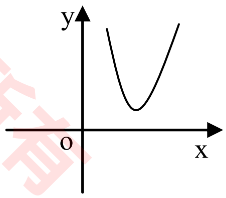
★学习目标

节次	学习目标
不等关系与不等式	了解不等式的性质
一元二次不等式及其解法	知道一元二次不等式的概念，理解一元二次不等式的解法
二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题	知道二元一次不等式的几何意义，理解用平面区域表示二元一次不等式组，关注实践应用
基本不等式：$\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$	理解两个正数的基本不等式及其简单应用，关注学科内综合

★要点解读

本章主干知识：不等式的性质及其应用，解一元二次不等式，用平面区域表示二元一次不等式组，求解简单的线性规划问题，两个正数的基本不等式及其简单应用.

1．一元二次不等式的解集

$\triangle=b^2-4ac$	$\triangle>0$	$\triangle=0$	$\triangle<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图像			
$ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两个不相等的实根	有两个相等的实根	没有实根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\|\ x\neq-\dfrac{b}{2a}\}$	R
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	φ	φ

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点；一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$,$ax^2+bx+c<0$ 的解集就是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的函数值大于零或小于零的 x 的取值范围，一元二次方程的根就是 $ax^2+bx+c>0$，$ax^2+bx+c<0$ 的解集的端点值.

2．二元一次不等式的几何意义

在平面直角坐标系中，二元一次不等式 $Ax+By+c>0$ 表示直线 $Ax+By+c=0$ 某侧所有点组成的平面区域，其作法分两步；（1）画直线 $Ax+By+c=0$ 确定边界.直线画成虚线表示区域不包含边界，画成实线表示区域包含边界；（2）取特殊点确定区域.

3、正确认识两个正数的基本不等式$\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$

（1）a、b 都是正数；（2）反映了和与积的不等关系；（3）当且仅当 a=b 时取“=”号.

★学法指导

1、作差比较法

[方法点拨]利用不等式的性质作差比较大小的步骤是：作差 $\longrightarrow$ 变形化简（如化为积或商的形式）$\longrightarrow$ 判断符号 $\longrightarrow$ 作出结论.

[案例剖析]设 $x\in R$，比较 $1+2x^4$ 与 x^2+2x^3 的大小

[解析]方法一：因为 $1+2x^4-(x^2+2x^3)=2x^3(x-1)-(x^2-1)=(x-1)^2(2x^2+2x+1)$

$$=(x-1)^2[2(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}]\geqslant 0.$$所以 $1+2x^4\geqslant x^2+2x^3$

方法二：因为 $1+2x^4-(x^2+2x^3)=(x^4-2x^3+x^2)+(x^4-2x^2+1)=(x^2-x)^2+(x^2-1)^2\geqslant 0$

所以 $1+2x^4\geqslant x^2+2x^3$

[点评] 不等式的性质属于了解层次,由于教材中有比较大小的题目,故这里拔高了要求．作差比较的关键是变形,常变形为几个因式的乘积或几个非负(正)数之和.

2、线性规划问题的求解

[方法点拨]解答线性规划问题的步骤是：（1）将已知数据列成表格形式，设出自变量 x、y 及目标函数 z；（2）找出约束条件及目标函数；（3）找出可行域，并结合图象求出最优解；（4）对结果进行检验，考虑最优解是否符合实际意义；（5）作答.

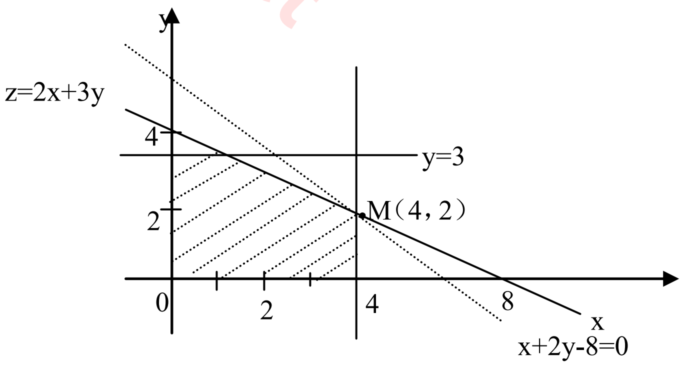
[案例剖析]某工厂用 A、B 两种配件生产甲、乙两种产品，每生产一件甲产品使用 4 个 A 配件耗时 1h，每生产一件乙产品使用 4 个 B 配件耗时 2h，该厂每天最多可以从配件厂获得 16 个 A 配件和 12 个 B 配件，若生产一件甲产品获利 2 万元，生产一件乙产品获利 3 万元，按每天工作 8h 计算，怎么安排生产才能获得最大利润.

[解析]

	甲（件）	乙（件）	限额
A（个）	4 个/件		16 个
B（个）		4 个/件	12 个
耗时(h)	1h/件	2h/件	8h
获利（万元）	2 万元/件	3 万元/件	

设甲、乙两种产品分别生产 x、y 件，获得的利润为 z

由上表可得 $\begin{cases}4x\leq 16\\4y\leq 12\\x+2y\leq 8\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$



由 $\begin{cases}x=4\\x+2y-8=0\end{cases}$ 得 M(4，2)

将 z=2x+3y 变形为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$

因为 $-\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}$ 所以当 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$，经过 M 时，$\frac{z}{3}$ 取得最大值.

即 x=4 且 y=2 时，z_{max}=14.

答：每天生产甲产品 4 件，乙产品 2 件时，工厂可获得最大利润 14 万元.

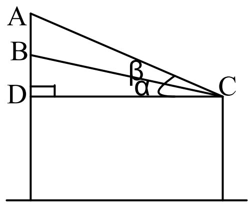
[点评]本题属应用层次，要求学生运用所学知识解决简单的线性规划问题.正确解答本题的关键一是列表，二是通过比较斜率（如$-\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}$）找到最优解，列表可以不写进解题过程.

3、应用基本不等式$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$（a、b∈R+）求最值

[方法点拨]应用基本不等$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$（a、b∈R+）求最值，“一正、二定、三等”三个条件缺一不可，其关键是凑定值，若积为定值则和有最小值，若和为定值，则积有最大值.

[案例剖析]如图树顶 A 离地面 am，树上另一点 B 离地面 bm.在离地面 cm 的 C 处看此树，离此树多远时看 A、B 的视角最大？

[解析]过点 C 作 CD⊥AB 交 AB 延长线于 D，设∠BCD=α，∠ACB=β，CD=x，在△BCD 中，$\tan\alpha=\frac{b-c}{x}$,在△ACD 中，



$\tan(\alpha+\beta)=\frac{a-c}{x}$，$\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\frac{a-b}{x}}{1+\frac{a-c}{x}\cdot\frac{b-c}{x}}$

$\le\frac{a-b}{2\sqrt{x\cdot\frac{(a-c)(b-c)}{x}}}=\frac{a-b}{2\sqrt{(a-c)(b-c)}}$，当且仅当 $x=\frac{(a-c)(b-c)}{x}$ 即 $x=\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 时 tanβ 取得最大，从而视角也最大.

[点评]此题属应用层次，关注实践应用，关注学科内综合.解答本题的关键是利用“β =（α + β）-α ”，便于在直角三角形中写出相应的三角函数值.另外，利用了正切函数的单调性，将角的最值问题，转化成为正切函数的最值问题.

★阶梯练习

A 级

1、 对于实数 a、b、c 有下列语句：

① a＞b，则 ac＜bc；②若 $ac^2>bc^2$，则 a＞b；③a＜b＜0，则 $a^2>ab>b^2$；

④若 c＞a＞b＞0，则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$；⑤若 a＞b，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 a＞0，b＜0

其中正确的个数是（　　）

A、2　　B、3　　C、4　　D、5

2、已知 A={x|x^2-4x+3≥0}，B={x|x≤0 或 x≥4}，则（　　）

A、A⫌B　　B、B⫌A　　C、A=B　　D、A∩B =φ

3、不等式 $9x^2$＞9x-1 的解集是（　　）

A、R　　B、φ　　C、{x|x∈R 且 x≠$\frac{1}{3}$}　　D、{$\frac{1}{3}$}

4、下列不等式中，不正确的是（　　）

A、$\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}(a,b \in R^{+})$　　B、$ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$

C、$ab \le (\dfrac{a+b}{2})^2$　　D、$(\dfrac{a+b}{2})^2 \ge \dfrac{a^2+b^2}{2}$

5、设 A=（x+1）(x+7)，B=（x+4）^{2}，则 A 与 B 的大小关系是____________

6、已知 m＞0，n＞0，且 m+n=4，则 mn 的最大值是_________________.

7、解不等式$-x^2+5x-6 \geqslant 0$.

8、画出不等式 x+2y≤−2 所表示的平面区域.

B 级

9、下列推导，不正确的是（　　）

A、c-a＜c-b⇒a＞b　　B、$\dfrac{c}{a} < \dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}$，c＞0⇒a＞b

C、a＞b＞0，c＞d＞0⇒$\sqrt{\dfrac{a}{d}} > \sqrt{\dfrac{b}{c}}$　　D、$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$（n∈N※，n≥2）⇒a＞b

10、已知不等式①$x^2-4x+3<0$，②$x^2-6x+8<0$，③$2x^2-9x+m<0$，要使同时满足①②的 x 也满足③则有：（　　）

A、m＞9　　B、m=9　　C 、m≤9　　D、0＜m≤9

11、已知 a、b、m∈R^{+}，且$\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+m}{a+m}$，则 a 与 b 的大小关系为______________.

12、已知 a＞0，b＞0，且 a≠b，比效$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a}$与 a+b 的大小.

13、某工厂生产 A 和 B 两种产品，已知制造产品 A1kg，要用煤 9t，电力 4kw，劳动力 3 个，能创造经济价值 7 万元；制造产品 B1kg，要用煤 4t，电力 5kw，劳动力 10 个，能创造经济价值 12 万元，现在该工厂有煤 360t，电力 200kw，劳动力 300 个，问在这种限制条件下，应生产产品 A、B 各多少千克，才能使所创造的总的经济价值最高？

C 级

14、若 a＞b＞1，$p=\sqrt{\lg a \cdot \lg b}, Q=\dfrac{1}{2}(\lg a+\lg b), R=\lg\dfrac{a+b}{2}$，则（　　）

A、R＜P＜Q　　B、P＜Q＜R　　C、Q＜R＜P　　D、P＜R＜Q

15、设 x＞-1,求函数 y=$\dfrac{(x+5)(x+2)}{x+1}$ 的最值.

数学5检测卷

本试题包括选择题、填空题和解答题三部分.时量120分钟.满分100分

一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案的代号填在题后的括号内.）

1．在△ABC中，$A=45^o$，$B=30^o$， b=2，则a的值为（　　）

A．4　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D． 3

2．已知数列$\sqrt{3},3,\sqrt{15},\cdots,\sqrt{3(2n-1)}$,那么9是数列的（　　）

A．第12项　　B．第13项　　C．第14项　　D．第15项

3．若a、b、c为实数，且a>b，则下面一定成立的是（　　）

A．ac>bc　　B．$a^2>b^2$　　C．a+c>b　　D．a-c>b-c

4．设a、b、c分别是△ABC的三边，且a=4，b=5，c=7，则△ABC是（　　）

A．直角三角形　　B．锐角三角形　　C．钝角三角形　　D．无法确定形状

5．设$a_1=2$，$a_n=3+\frac{1}{a_{n-1}}$，则$a_5=$（　　）

A．$\frac{251}{76}$　　B．3　　C．$\frac{76}{23}$　　D．7

6．已知{ a_n }为等差数列，且$a_2=3$， $a_6=5$，$s_7=$（　　）

A．42　　B．28　　C．24　　D．34

7．设P=x(x-4)，Q=(x-1)(x-3)，其中x取任意实数，则P与Q的大小关系可以表示为（　　）

A．P>Q　　B．P≥Q　　C．P<Q　　D．P≤Q

8．在等比数列$\{a_n\}$中，若$a_2=6$，且$a_5-2a_4-a_3+12=0$

则a_n为（　　）

A． 6　　B． $6\cdot(-1)^{n-2}$

C．$6\cdot2^{n-2}$　　D． 6或$6\cdot(-1)^{n-2}$或$6\cdot2^{n-2}$

9．实数a、b满足a+b=2，则3^a+3^b的最小值为（　　）

A．18　　B．6　　C．9　　D．12

10．在△ABC中，a=6、b=7、c=8则下面的式子成立的是（　　）

A．6>7cosC+8cosB　　B．6<7cosC+8cosB　　C．6=7cosC+8cosB　　D．6≥7cosC+8cosB

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分.把答案填在题中横线上.）

11．在△ABC中，∠A=60^0，∠A的对边a=$\sqrt{3}$，则△ABC的外接圆的半径是_____.

12．等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_4a_6=9$，则$\log_3a_3+\log_3a_7=$______.

13．.若不等式 $px^2+qx+2>0$ 的解集为$\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\}$,则 p+q=_______.

14．数列 $1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{1}{8}$，$4\frac{1}{16}$，$5\frac{1}{32}$，…，的前 n 项之和等于______________.

15．不等式组 $\begin{cases}(x-y+5)(x+y)\geq 0,\\ 0\leq x\leq 3\end{cases}$ 表示的平面区域的面积是_______.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 40 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

16．(本小题满分 6 分)

若$\{a_n\}$是一个各项都为正数的无穷等比数列，a_1 和 a_3 是方程 $x^2-8x+7=0$ 的两个根，求它的通项公式.

17．(本小题满分 8 分)

已知△ABC 中，$\tan B=\frac{1}{4}$， $\tan C=\frac{3}{5}$

（1）求角 A 的大小；

（2）如果△ABC 最长的边长为$\sqrt{17}$，求最小边的长.

18．(本小题满分 8 分)

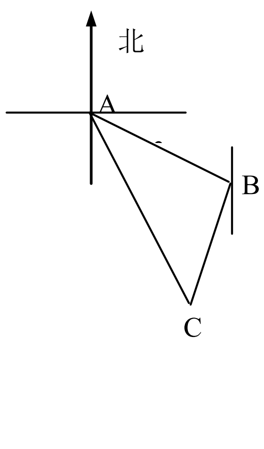
已知集合 $M=\{x\mid x^2+3x-18>0\}$，$N=\{x\mid (x-k)(x-k-1)\leq 0\}$，若 $M\cap N\neq\Phi$，求实数 k 的取值范围.

19．(本小题满分 8 分)

一投资公司有 300 万元资金，准备投资 A、B 两个项目，按照合同要求，对项目 A 的投资不少于对项目 B 的三分之二，而对每个项目的投资不少于 25 万元，若对项目 A 投资 1 万元可获利润 0.4 万元，对项目 B 投资 1 万元可获利润 0.6 万元，求该公司在这两个项目上共可获得的最大利润是多少？

20．(本小题满分 10 分)

如图，甲船在 A 处，乙船在 A 处的南偏东 45°方向，距 A 有 9n mile 的 B 处，并以 20n mile/h 的速度沿南偏西 15°方向航行，若甲船以 28n mile/h 的速度航行，应沿什么方向，用多少 h 能尽快追上乙船？（角度精确到 1°）



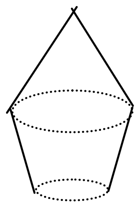
本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分. 时量 120 分钟. 满分 100 分.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

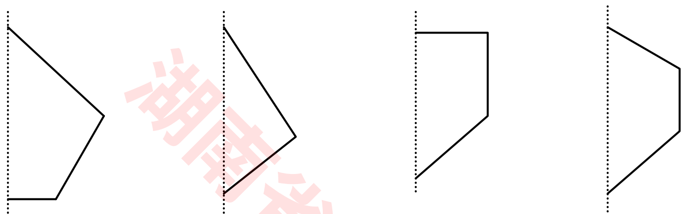
1、函数 $y=a^{x-2}+2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的图象必经过点（ ）

A、(0,1)　　B、(1,1)　　C、(2,3)　　D、(2,4)

2、图（1）是由下列哪个平面图形旋转得到的（ ）



图（1）

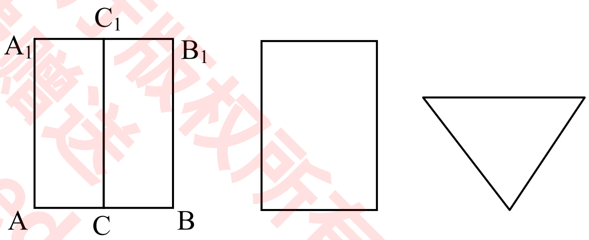


A　　B　　C　　D

3、如右图为一个几何体的三视图，其中俯视图为正三角形，$A_1B_1=2$，$AA_1=4$，则该几何体的表面积为（ ）

A、$6+\sqrt{3}$　　B、$24+\sqrt{3}$

C、$24+2\sqrt{3}$　　D、32



正视图　　侧视图　　俯视图

4、下右程序当 x=38 时运行后输出的结果为（ ）

A、38　　B、83　　C、80　　D、77

```
INPUT x
a=x\10
b=x MOD 10
x=10*b-a
PRINT x
END
```

第 4 题

5、从 1，2，3，4 这 4 个数中，不放回地任意取两个数，两个数都是偶数的概率是（ ）

A、$\frac{1}{6}$　　B、$\frac{1}{4}$　　C、$\frac{1}{3}$　　D、$\frac{1}{2}$

6、已知 $\cos\alpha=\frac{12}{13},\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=$　（ ）

A、$\frac{5\sqrt{2}}{13}$　　B、$\frac{7\sqrt{2}}{13}$　　C、$\frac{17\sqrt{2}}{26}$　　D、$\frac{7\sqrt{2}}{26}$

7、不等式 $\frac{x-1}{2-x}\geqslant0$ 的解集是( )

A. {x|1≤x≤2}　　B. {x|1≤x<2}

C. {x|x>2 或 x≤1}　　D. {x|x≥1}

8、△ABC 中,已知 a=$5\sqrt{2}$,c=10,A=30°,则 B 等于(　)

A、105°　　B、60°　　C、5°　　D、105° 或 15°

9、在等差数列$\{a_n\}$中，a_5＝33，公差 d=3，则 201 是该数列的第（ ）项

A．60　　B．61　　C．62　　D．63

10、已知点 P（x，y）在不等式组$\begin{cases} x-2\le 0, \\ y-1\le 0, \\ x+2y-2\ge 0 \end{cases}$表示的平面区域上运动，则 z=$x$−$y$ 的取值范围是（ ）

A．[−2，−1]　　B．[−2，1]　　C．[−1，2]　　D．[1，2]

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11、求值：$2\log_3\dfrac{1}{2}+\log_3 12-(0.7)^0+0.25^{-1}=$____.

12、过点（−1，2）且倾斜角为 135^0 的直线方程是_________.

13、已知向量 $\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(4,-2)$,则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$_____.

14、在△ABC 中,A、B、C 成等差数列,且 b=2,则外接圆的半径 R=________.

15、经过直线 2x+3y-7=0 与 7x+15y+1=0 的交点，且平行于直线 x+2y-3=0 的直线方程是________.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 40 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

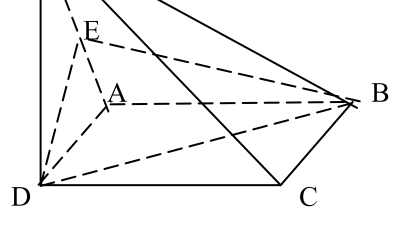
16、(本题满分 6 分)

已知函数 f(x)=cos²x−sin²x+2sinx •cosx,求 f(x)的最小正周期,并求当 x 为何值时 f(x)有最大值，最大值等于多少？

17、(本小题满分 8 分)

如图：已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$平面$ABCD$, $ABCD$是正方形，E 是 PA 的中点，

求证：(1) PC // 平面 EBD　　(2)平面 PBC⊥平面 PCD



18、（本小题满分 8 分）

将形如$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$的符号称为二阶行列式，现规定$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

（1）试计算二阶行列式$\begin{vmatrix} \sin\frac{\pi}{4} & 1 \\ 1 & \cos\frac{\pi}{3} \end{vmatrix}$；（2）若已知函数$f(\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \frac{1}{2} & \sin\frac{5\pi}{3} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，

求锐角θ的值.

19、（本小题满分 8 分）

在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 27$，$a_2 + a_4 = 30$试求：（1）$a_1$和公比$q$；（2）前 6 项的和$S_6$.

20、(本小题满分 10 分）

已知$f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0且a \neq 1)$

（1）证明函数$f(x)$的图象关于y轴对称；

（2）判断$f(x)$在$(0, +\infty)$上的单调性，并用定义加以证明；

（3）当$x\in$［1，2］时函数$f(x)$的最大值为$\frac{5}{2}$，求此时a的值.

学业水平考试检测卷（二）

本试题卷包括选择题、填空题和解答题三部分.时量 120 分钟.满分 100 分.

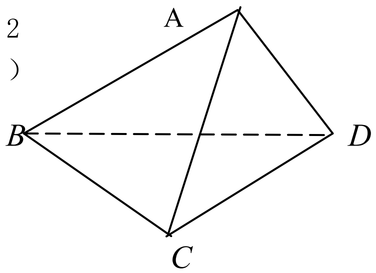
一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1、对于函数 $y=\log_2 x$，$x\in[2,4]$,下列说法正确的是（ ）

A、是增函数,最大值为 1　　B、是增函数,最大值为 2

C、是减函数,最大值为 1　　D、是减函数,最大值为 2

2、已知三棱锥 A-BCD 的棱长都相等，则 AD 与 BC 所成的角是：（ ）



A、30^0　　B、45^0

C、60^0　　D、90^0

3、直线 $\sqrt{3}x+y-5=0$ 的倾斜角为（ ）

A、30^0　　B、60^0　　C、120^0　　D、150^0

4、下列给出的赋值语句中正确的是（ ）

A、M=4　　B、4=M　　C、x+y=0　　D、INPUT M=4

5、取一根长度为 5m 的绳子，拉直后在任意位置剪断，那么剪得两段的长度都不小于 2m 的概率是（ ）

A、$\dfrac{1}{5}$　　B、$\dfrac{1}{3}$　　C、$\dfrac{1}{4}$　　D、不确定

6、若 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x=0, x\in(0.\pi)$，则 $x=$（ ）

A、$\dfrac{\pi}{3}$　　B、$\dfrac{\pi}{6}$　　C、$\dfrac{5\pi}{6}$　　D、$\dfrac{2\pi}{3}$

7、在Δ ABC 中，已知 $\cos A\cdot\cos B=2\sin^2\dfrac{C}{2}$，则Δ ABC 一定是（ ）

A. 直角三角形　　B. 钝角三角形

C. 等腰三角形　　D. 等边三角形

8、直线 2x+y+5=0 上的点到原点距离的最小值为（ ）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{10}$

9、等比数列$\{a_n\}$中，a_3，a_9是方程 $3x^2—11x+9=0$ 的两个根，则 a_6=（ ）

A. 3　　B. $\dfrac{11}{6}$　　C. $\pm\sqrt{3}$　　D. 以上皆非

10、在一次体操大奖赛上，七位裁判为运动员打出的分数如下： 9.4　8.4　9.4　9.9　9.6　9.4　9.7　去掉一个最高分和一个最低分后,所剩数据的平均值和方差分别为（ ）

A、9.4,0.484　　B、9.4,0.016　　C、9.5,0.04　　D、9.5,0.016

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.

11、设 $g(x)=\begin{cases} e^{x}, x\le 0. \\ lnx, x>0. \end{cases}$ 则 $g(g(\frac{1}{3}))=$______.

12、已知幂函数 $y=f(x)$ 的图象经过点(2, $\sqrt{2}$)，那么这个幂函数的解析式为________.

13、已知直线 a,b 和平面 α，且 $a\perp b, a\perp\alpha$, 则 b 与 α 的位置关系_________ .

14、方程 $x^2+2x-15<0$ 的解集_____________.

15、在下列函数中：

① $y=|x+\frac{1}{x}|$ ； ② $y=\log_2 x+\log_x 2(x>0,且x\ne 1)$；

③ $y=3^x+3^{-x}$；④ $y=x+\frac{4}{x}-2$； ⑤ $y=\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}-2$

其中最小值为 2 的函数是____________.（填入正确命题的序号）

三、解答题：本大题共 5 小题，共 40 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16、(本小题满分 6 分)

求过点 A（3，2），且在两坐标轴上的截距互为相反数的直线 l 的方程.

17、(本小题满分 8 分)

盒中仅有 4 个白球和 5 个黑球, 从中任意取出一个球.

(1)“取出的球是黄球”是什么事件？它的概率是多少？

(2)“取出的球是白球”是什么事件？它的概率是多少？

(3)“取出的球是白球或是黑球”是什么事件？它的概率是多少

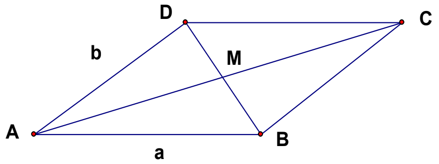
18、(本小题满分 8 分)

甲船在 A 处、乙船在甲船正南方向距甲船 20 海里的 B 处，乙船以每小时 10 海里的速度向正北方向行驶，而甲船同时以每小时 8 海里的速度由 A 处向南偏西 60° 方向行驶，问经过多少小时后，甲、乙两船相距最近？

19、(本小题满分 8 分)

如图，平行四边形 ABCD 的两条对角线相交于点 M，已知 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$

求向量 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$.



20、(本小题 10 分)

设圆上的点 A(2,3)关于直线 x+2y=0 的对称点仍在圆上,且与直线 x-y+1=0 相交的弦长为 $2\sqrt{2}$，求圆的方程.

参考答案

数学 1

第一章　集合与函数概念

A 级　1-4 CAAB　5、③、⑤；　6、 $\{x\,|\,x\le 2\text{且}x\ne 1\}$；

7.（1）$\{x\,|\,2<x<3\}$，$\{x\,|\,-1\le x\le 5\}$；（2）$\{x\,|\,3\le x\le 5\}$，$\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$

8．解：A＝{3，5}，因为 B⊆A，若 B＝∅时，则 a＝0，若 B≠∅时，则 a≠0，这时有 $\frac{1}{a}$ ＝3 或 $\frac{1}{a}$ ＝5，即 a＝$\frac{1}{3}$，或 a＝$\frac{1}{5}$，所以由实数 a 组成的集合为 {0，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$}．

B 级　9．A　10、C　11、—4　12．（1）略；（2）$f(x)_{\max}=1, f(x)_{\min}=-35$

13．解：设投入 B 产品为 x 万，则投入 A 产品为 $100-x$ 万，总收益为 y 万.

由题意可知： $y=\dfrac{100-x}{5}+2\sqrt{x}, 0\le x\le 100$，设 $t=\sqrt{x}$，则 $0\le t\le 10$.

原式为：$y=-\dfrac{1}{5}t^2+2t+20$，$\therefore y=-\dfrac{1}{5}(t-5)^2+25$，$\because 0\le t\le 10$，$\therefore$ 当 $t=5$ 时，此时 $x=25$，y 有最大值为 25.

答：当投入 A 产品为 75 万，投入 B 产品为 25 万时，两种产品的年总收益最大为 25 万.

C 级　14．　-1；　　提示：令 $2x+1=3, x=1, f(3)=f(2x+1)=x^2-2x=-1$；

15．解：∵f(x)为奇函数，∴f(－x)=－f(x)，

$$\therefore \frac{ax^2+1}{-bx+c}=\frac{ax^2+1}{-bx-c}\Rightarrow -bx+c=-bx-c\Rightarrow c=0,$$

$$\therefore f(x)=\frac{ax^2+1}{bx}, \therefore f(1)=\frac{a+1}{b}=2\Rightarrow a=2b-1.$$

$f(x)=\dfrac{(2b-1)x^2+1}{bx}$,

$\because f(2)<3, \therefore \dfrac{4(2b-1)+1}{2b}<3 \Rightarrow \dfrac{2b-3}{2b}<0 \Rightarrow 0<b<\dfrac{3}{2}$,

∵a, b, c, ∈Z ，∴b=1, ∴a=1, 综上 ，a=1, b=1, c=0.

第二章基本初等函数（I）

A 级 1-4 D D C C 5. $(2,3)\cup(3,+\infty)$ 6. $\dfrac{2a+b}{1-a}$

7. 解：原式=$(2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{2}})^6+(2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}}-4\times\dfrac{7}{4}-2^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{3}{4}}-1$=$2^2\times 3^3$+2 — 7— 2—1=100

8. 解:当 x∈(－∞，1)时，由 $2^{-x}=\dfrac{1}{4}$，得 x=2，但 2∉（－∞，1)，舍去.

当 x∈(1，+∞)时，由 $\log_4 x=\dfrac{1}{4}$，得 x=$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$∈(1，+∞). 综上所述，x=$\sqrt{2}$

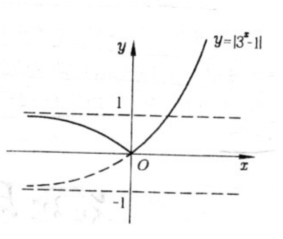
B 级 9. B 10. $\dfrac{1}{4}$ 11. （1，2）

12. 解：∵ g(x)是一次函数 ∴可设 g(x)＝kx+b (k≠0) ∴f$\left[g(x)\right]$=2^{kx+b} g$\left[f(x)\right]$=k×2^x+b

∴依题意得：$\begin{cases}2^{2k+b}=2\\ k\cdot 2^2+b=5\end{cases}$ 即$\begin{cases}2k+b=1\\ 4k+b=5\end{cases}$，∴$\begin{cases}k=2\\ b=-3\end{cases}$

∴ $g(x)=2x-3$.

13. 解：当k<0时，直线$y=k$与函数 $y=|3^x-1|$ 的图象无交点,即方程无解;



当k=0或k≥1时，直线$y=k$与函数 $y=|3^x-1|$ 的图象有唯一的交点，所以方程有一解;

当0<k<1时，直线$y=k$与函数 $y=|3^x-1|$ 的图象有两个不同交点，所以方程有两解.

C 级 14. 答案：B 提示∵函数 f（x）在区间端点 0、1 处取到最大值与最小值

$\therefore$ f（0）+f（1）=a ，即 $1+a+\log_a 2=a$，解得 a=$\dfrac{1}{2}$

15．解;（Ⅰ）因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)$=0，即 $\dfrac{b-1}{2+2}=0\Rightarrow b=1\therefore f(x)=\dfrac{1-2^x}{2+2^{x+1}}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=\dfrac{1-2^x}{2+2^{x+1}}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^x+1}$，设 $x_1<x_2$ 则

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{2^{x_1}+1}-\dfrac{1}{2^{x_2}+1}=\dfrac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$，因为函数 y=$2^x$ 在 R 上是增函数且 $x_1<x_2$

$\therefore 2^{x_2}-2^{x_1}$>0，又 $(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)$>0 $\therefore f(x_1)-f(x_2)$>0 即 $f(x_1)>f(x_2)$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为减函数.

（Ⅲ）因 $f(x)$ 是奇函数，不等式 $f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$ 等价于 $f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)$，又因 $f(x)$ 为减函数，由上式推得：$t^2-2t>k-2t^2$．即对一切 $t\in R$ 有：$3t^2-2t-k>0$，

从而判别式 $\Delta=4+12k<0\Rightarrow k<-\dfrac{1}{3}$.

第三章函数的应用

A 级 1-4 C B B C 5.2 6. $y=av^2+\dfrac{b}{v}$（v>0）

7.解：因为函数的图象是连续不断的，并且由对应值表可知 $f(-2)\cdot f(-1.5)<0$，

$f(-0.5)\cdot f(0)<0$，$f(0)\cdot f(0.5)<0$，所以函数 $f(x)$ 在区间（−2，−1.5），

（−0.5，0）以及（0，0.5）内有零点.

8.解：设成本费为 a 元，则若月初售出，到月末共获利润为：y_1=100+（a+100）×2．4%

若月末售出，可获利 y_2=120−5=115（元），y_1-y_2=0．024a−12．6=0．024（a−525）

故当成本大于 525 元时，月初售出好；成本小于 525 元时，月末售出好.

B 级　9. D　10. $V(x)=x(20-2x)(12-2x)\ (0<x<6)$　11. $\frac{6400}{3}$

12. 证明：$\because$ 函数 $f(x)=\frac{2x-5}{x^2+1}$ 的定义域为 R，$\therefore$ 函数 f(x)的图像在区间(2,3)上是连续的.

$\because f(2)=\frac{2\times2-5}{2^2+1}=\frac{-1}{5}<0$，$f(3)=\frac{2\times3-5}{3^2+1}=\frac{1}{10}>0$，$\therefore$ f(2)f(3)<0，$\therefore$ 函数 f(x)在区间(2,3)上至少有一个零点.

13. 解：（1）设增长率为 x，由题意得 28400=7100（1+x）^{20}，∴（1+x）^{20}=4，

20lg（1+x）=2lg2，lg（1+x）≈0. 03010，∴1+x≈1. 072，∴x≈0. 072=7. 2%

（2）设 y 年可以翻两番，则 28400=7100（1+0.08）^{y}，即 1.08^{y}=4，∴$y=\frac{2\lg2}{\lg1.08}\approx\frac{0.6020}{0.0334}\approx18.02$，

故 18 年后可翻两番.

C 级　14. A　提示：作出图象，发现当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 与函数 $y=x+a$ 有 2 个交点. 15. 解：根据题意，该产品的月产量 y 是月份 x 的函数，可供选用的函数有两种，其中哪一种函数确定的 4 月份该产品的产量愈接近于 1.37 万件，哪种函数作为模拟函数就较好，故应先确定出这两个函数的具体解析式. 设 $y_1=f(x)=px^2+qx+r$(p,q,r 为常数，且 $p\neq0$)，$y_2=g(x)=a\cdot b^x+c$，根据已知，得 $\begin{cases}p+q+r=1,\\4p+2q+r=1.2,\\9p+3q+r=1.3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}ab+c=1,\\ab^2+c=1.2,\\ab^3+c=1.3,\end{cases}$

$\therefore p=-0.05,q=0.35,r=0.7;a=-0.8,b=0.5,c=1.4,$

$\therefore f(x)=-0.05x^2+0.35x+0.7.g(x)=-0.8\times0.5^x+1.4$，$\therefore f(4)=1.3,g(4)=1.35$.

显然 $g(4)$ 更接近于 1.37，故选用 $y=-0.8\times0.5^x+1.4$ 作为模拟函数较好.

数学 1 检测卷

1-5 A B B B C　　6-10 B B D B C

11. 1　12. $(-\infty,-1)$　13. 1　14. $y=13(1+1\%)^x=13\times1.01^x$　15. ①⑤

16. 解：（1）R ；(2)$\{x|1<x<3$ 或 $5<x<7\}$；　(3)$\{x|x\le 1, 3\le x\le 5$或$x\ge 7\}$

17. 解：（1）定义域为：$(-3,2)\cup(2,4)$，（2）原式=19+$\frac{2}{5}$+2=$\frac{107}{5}$

18. 解：（1）阴影部分的面积为$50\times1+80\times1+90\times1=220$.阴影部分的面积表示汽车在 3 小时内行驶的路程为 220km.（2）根据图示，有

$$S=\begin{cases}50t+2004(0\le t<1)\\80(t-1)+2054(1\le t<2)\\90(t-2)+2134(2\le t\le 3)\end{cases}$$

19. 解：（1）由已知$f(2)=1$得：$\frac{2}{2a+b}=1$①，又由$\frac{x}{ax+b}=x$得：$ax^2+(b-1)x=0$有唯一解，即$\Delta=(b-1)^2=0$得$b=1$，代入①得$a=\frac{1}{2}$，故$f(x)=\frac{2x}{x+2}$.

(2) $\because f(-3)=6, \therefore f[f(-3)]=\frac{3}{2}$.

20. 解：（1）∵ $f(x)$的定义域为 R，设$x_1<x_2$，则

$f(x_1)-f(x_2)=a-\frac{1}{2^{x_1}+1}-a+\frac{1}{2^{x_2}+1}=\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}$，∵ $x_1<x_2$ ，

∴ $2^{x_1}-2^{x_2}<0$　$(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})>0$，∴ $f(x_1)-f(x_2)<0$　即$f(x_1)<f(x_2)$，所以不论a为何实数$f(x)$总为增函数.（2）∵ $f(x)$为奇函数　∴ $f(-x)=-f(x)$，即

$a-\frac{1}{2^{-x}+1}=-a+\frac{1}{2^x+1}$，解得：$a=\frac{1}{2}$　　∴ $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$.

（3）由（2）知$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^x+1}$，∵ $2^x+1>1$，∴ $0<\frac{1}{2^x+1}<1$，

∴ $-1<-\frac{1}{2^x+1}<0$　　∴ $-\frac{1}{2}<f(x)<\frac{1}{2}$ ，　所以$f(x)$的值域为$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

数学 2

第一章 简单几何体

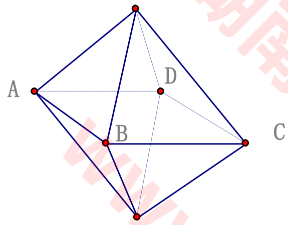
A 级 1——5 BDACB　6. 1：5　7. $2\sqrt{3}$ ：1　8. $\frac{\sqrt{7}}{4}a^2$（$h_{斜}=\frac{\sqrt{7}}{6}a$）

B 级 9--10. A D B　11. 2:3　12. $\frac{9\sqrt{7}}{2}cm^2$（$h_{斜}=\frac{\sqrt{7}}{2}$）

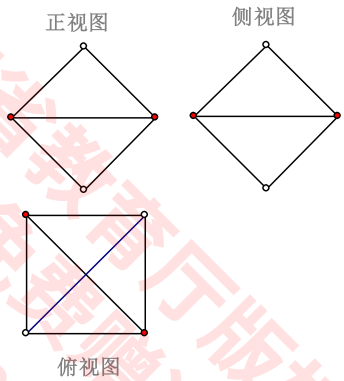
13．解:过 A、B_1、D_1三点的截面△AB_1D_1的面积为 $2\sqrt{34}$ ∴所剩几何体的表面积为 $60+2\sqrt{34}$

C 级 14．解:如下图是其直观图和三视图，该几何体的结构特征是：两个共底的四棱锥.

表面积和体积分别是：　$S=1800\sqrt{3}\ cm^2$，$V=9000\sqrt{2}\ cm^3$



直观图



15．解: (1) $128\pi\ cm^3$　(2) $\frac{2048\pi}{81}cm^3$（内切球的半径 $r=\frac{8}{3}cm$）

(3) $\frac{2500\pi}{9}cm^2$（外接球的半径 $R=\frac{25}{3}cm$）

第二章　点、直线、平面之间的位置关系

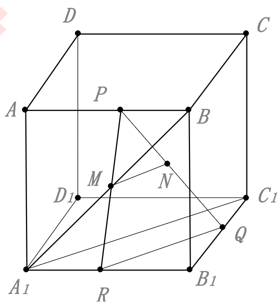
A 级 1—7. ABCDDDB　8. 90^0

B 级 9—10. DD　11. 30^0

12. ①菱形　②矩形　13. 无数，1，1，无数

C 级 14. 如图，可证明 MN∥RQ∥A_1C_1（略）

15. (1)$2\sqrt{2}$ cm　(2)$\sqrt{2}$　(3)$2\sqrt{6}$ cm



第三章　直线与方程

A 级 1——7 BBCADAC　8. 135^0　9. $\frac{\sqrt{3}}{3}$，30^0　B 级 10. D　11. A　12. ±2　13. $-\frac{24}{7}$

C 级 14. $(-\infty, -4]\cup[\frac{3}{4},+\infty)$　15. 1 或 －1

第四章　圆与方程

A 级 1——7. CBBCCAA　8. P`$(-x_0, y_0, -z_0)$　B 级 9--11. BDD　12. $2\sqrt{5}$　13. 4

C 级 14. x-y-5=0 和 7x-y+25=0

15. 解：(1) 将方程化为 $[x-(t+3)]^2+[y+(1-4t^2)]^2=(t+3)^2+(1-4t^2)^2-16t^4-9$ 则

$-7t^2+6t+1>0$ 得 $-\frac{1}{7}<t<1$

(2) 半径平方 $r^2=-7t^2+6t+1=-7(t-\frac{3}{7})^2+\frac{16}{7}\leqslant\frac{16}{7}$

$\therefore t=\frac{3}{7}$ 时，半径的最大值 $r=\frac{4\sqrt{7}}{7}$ ∴ 圆的标准方程为 $(x-\frac{24}{7})^2+(y+\frac{13}{49})^2=\frac{16}{7}$.

数学 2 检测卷

一、选择题（每小题 4 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	D	B	A	D	C	C	B	C

二、填空题（每小题 4 分） 11. $A\in l$, $A\in\alpha$, $B\notin\alpha$, $B\in l$ 12. (1,0,0)或(-3,0,0)

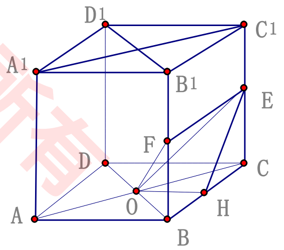
13. ③④ 14. $\sqrt{3}$，0 15. $\frac{21}{5}$，0

三、解答题：

16. 解：(1)交点 P（0，2）到直线 a：3x－4y+5=0 的距离$=\frac{|3\times0-4\times2+5|}{5}=\frac{3}{5}$；

(2)经过点 P（0，2），且与直线 b：2x－4y-3=0 垂直的直线方程为 2x+y-2=0.

17. 解：(1)如图，设 F 点是 B_1B 的中点，连接 EF、OF



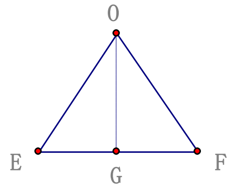
由正方体的性质得

EF∥BC ⇒∠OEF 就是异面直线 OE 与 BC 所成的角.

OE=OF ⇒△OEF 是等腰三角形，取 EF 中点 G 得 Rt△OGE

又 EF=BC=2 ⇒EG=1 ，$OE=\sqrt{OC^2+CE^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}=\sqrt{3}$

$\therefore \cos\angle OEG=\frac{EG}{OE}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



∴异面直线 OE 与 BC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(2)设 H 点是 BC 的中点，连接 EH、OH ，则 OH∥AB

而正方体中 AB⊥平面 BCC_1B_1 ⇒ OH⊥平面 BCC_1B_1

⇒EH 是 OE 在平面 BCC_1B_1 的射影 ⇒∠OEH 就是直线 OE 与平面 BCC_1B_1 所成的角.

在 Rt△OHE 中 $HE=\sqrt{2}$， OH=1，∴ $\tan\angle OEH=\frac{OH}{EH}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ 直线 OE 与平面 BCC_1B_1 所成角的正切值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$； (3)证明：略.

18. 解：(1)∵圆心 C 在 x 轴上且该圆与 y 轴相切 ∴设圆心 C(a,0),半径 r=|a|,a≠0

设圆的方程为 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 将点 A（-1，2）代入得$(-1-a)^2+2^2=a^2$ ∴ $a=-\frac{5}{2}$

∴所求圆 C 的方程为 $(x+\frac{5}{2})^2+y^2=\frac{25}{4}$

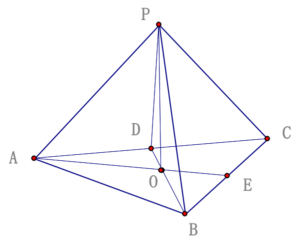
(2)**方法一** 联立方程 $y=x+2$ 与 $(x+\frac{5}{2})^2+y^2=\frac{25}{4}$ 得交点 P（$-\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$），Q（-4，-2）

∴直线 l 被圆截得的弦长 $|PQ|=\sqrt{(-\frac{1}{2}+4)^2+(\frac{3}{2}+2)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

方法二 ∵圆心 C（$-\frac{5}{2}$，0）到直线 l：$y=x+2$ 的距离 $d=\frac{\left|-\frac{5}{2}-0+2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

∴直线 l 被圆截得的弦长 $|PQ|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{2}{16}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

19. 解：(1)如图是正三棱锥 P-ABC 的直观图,



∵三视图中的高 $2\sqrt{3}$ 就是正三棱锥的高 $h=PO=2\sqrt{3}$.

底面边长 AB=BC=CA=12 $\Rightarrow BD=6\sqrt{3}$ $\Rightarrow DO=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow$侧面上的斜高 $PD=2\sqrt{6}$

$\Rightarrow$侧面面积$=3\times\frac{1}{2}\times AC\times PD=36\sqrt{6}$（$cm^2$） 底面面积$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times12^2=36\sqrt{3}$（$cm^2$）

∴正三棱锥 P—ABC 的表面积$==36\sqrt{6}+36\sqrt{3}$ （cm^2）；

(2)正三棱锥 P—ABC 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{底}\times h_{高}=\frac{1}{3}\times36\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=72$（$cm^3$）

20. (1)解: 将圆 C 的方程 $x^2+y^2-8y+12=0$ 配方得标准方程为 $x^2+(y-4)^2=4$，则此圆的圆心为（0,4），半径为 2.

(1) 若直线 l 与圆 C 相切，则有 $\frac{|4+2m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$． 解得 $m=-\frac{3}{4}$.

(2) 解法一：过圆心 C 作 $CD\perp AB$，则根据题意和圆的性质，得

$$\begin{cases} CD=\frac{|4+2m|}{\sqrt{m^2+1}}, \\ CD^2+DA^2=AC^2=2^2, \\ DA=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}. \end{cases}$$ 解得 m=-7,或 m=-1.

∴直线 l 的方程是 $7x-y+14=0$ 和 $x-y+2=0$.

数学 3

第一章　　算法初步

A 级　　1-5 CBDAA　　　6、 5 次, 5 次　　　7、 -10　　8、4.

B 级　9．0 ；　　10．24;　　　11.　22　、—22　　12.INPUT，WHILE，WEND

13. 解:第一步:设 i 的值为 1;

第二步:设 sum 的值为 0;

第三步:如果 i≤100 执行第四步,否则转去执行第七步;

第四步:计算 sum＋i 并将结果代替 sum;

第五步:计算 i＋1 并将结果代替 i;

第六步:转去执行第三步;

第七步:输出 sum 的值并结束算法

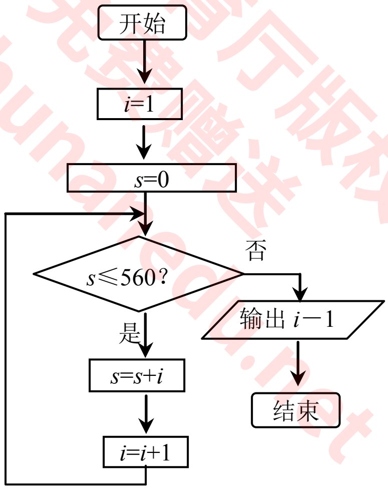
C 级

14．　根据秦九韶算法此多项式可变形 $f(x)=x(x(x(x(x(3x+5)+6)+79)-8)+35)+12$

按照从内到外的顺序，依次计算一次多项式当 $x=-4$ 时的值：$v_0=-4$　$v_1=3\times(-4)+5=-7$

$v_2=(-4)\times(-7)+6=34$　$v_3=(-4)\times34+79=-57$　故当 $x=-4$ 时 $v_3=-57$.

15. 解：(1)



(2)将“*s*=1”改为“*s*=0”；“*Do*”改为“*WHILE*”；“*PRINT n*+1”改为“*PRINT n*”

第二章 统计

A 级　　1-5 DDDCC　　6、14 和 0.14　　7、-3

8、(1) 线性回归方程 $\hat{y}=bx+a$ 的图像经过定点 $(\bar{x},\bar{y})$，将 $\bar{x}=4$，$\bar{y}=5.4$ 代入回归方程

得 $5.4=4b+a$，又 $8b+a-(7b+a)=1.1$，解得 $b=1.1$，$a=1$，故线性回归方程 $\hat{y}=1.1x+1$.

(2) 将 $x=10$ 代入线性回归方程得 $\hat{y}=12$ 万元．故使用年限为 10 年时，维修费是 12 万元.

B 级　9、A　　10、5　　11、2　　12、1　　　13、181，185，177，13.66

C 级　　14、**解**：用前两位数作为茎，茎叶图为

甲		乙
8	50	7
87632	51	024668
8764220	52	013468
43	53	02
	54	

所以甲机床生产的零件的指标分布大致对称，平均分在 520 左右，中位数和众数都是 522，乙机床生产的零件的指标分布也大致对称，平均分也在 520 左右，中位数和众数分别是 520 和 516，总的看，甲的指标略大一些.

15、（1）a=0.45，m=6　（2）略

第三章 概率

A 级　1-5 CBDBC 、6、$\frac{1}{4}$　7、$\frac{1}{8}$

8、解：每次取出一个，取后不放回地连续取两次，其一切可能的结果组成的基本事件有 6 个，即（a_1，a_2）和，（a_1，b_2），（a_2，a_1），（a_2，b_1），（b_1，a_1），（b_2，a_2）.其中小括号内左边的字母表示第 1 次取出的产品，右边的字母表示第 2 次取出的产用 A 表示“取出的两种中，恰好有一件次品”这一事件，

则 A={（a_1，b_1），（a_2，b_1），（b_1，a_1），（b_1，a_2）}，

事件 A 由 4 个基本事件组成，因而，P（A）$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

B 级　9、A　10、　1/18　11、0　　12、　0.25

13. 记“有 3 人等候”为事件 A，“有 4 人等候”为事件 B，“5 人及 5 人以上等候”　为事件 C，则易知 A、B、C、互斥. 记“至少 3 人排队等候”为事件 G，则 $G=A\cup B\cup C$，故

$$P(G)=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=0.3+0.1+0.04=0.44;$$

C 级　14.　解：基本事件的总数为：12×11÷2＝66

“能取出数学书”这个事件所包含的基本事件个数分两种情况：

（1）“恰好取出 1 本数学书”所包含的基本事件个数为：10×2＝20

（2）“取出 2 本都是数学书”所包含的基本事件个数为：1

所以“能取出数学书”这个事件所包含的基本事件个数为：20＋1＝21

因此，　P（“能取出数学书”）＝$\frac{7}{22}$

15.　解：因为均匀的粒子落在正方形内任何一点是等可能的，所以符合几何概型的条件.

设 A＝“粒子落在中间带形区域”，依题意得：正方形面积为：25×25＝625　两个等腰直角三角形的面积为：2×$\frac{1}{2}$×23×23＝529 带形区域的面积为：625－529＝96　∴　P（A）＝　96/625

数学 3 检测卷

一、选择题 1-5　C D C B A　6-10　C D B C B

二、填空题　11、51　12、750　13、$\frac{4-\pi}{4}$　14、 96　15、16

三、解答题： 16、（1）如图所示，茎表示成绩的整数环数，叶表示小数点后的数字.

甲		乙
8 2 5	7	1
4 7	8	7 5
4	9	1 8 7 2 1
8 7 5 1	10	1 1

甲中位数是 9.05，乙中位数是 9.15，乙的成绩大致对称，可看出乙发挥稳定性好，甲波动性大.

17.解：在流程图中的判断结构内应填写的条件应是 $i<8$，由题意要统计身高在 160~180cm(含 160cm，不含 180cm)的学生人数，事实上，是图 1 中条形图从第四个矩形到第七个矩形所对应的人数之和，即 $A_4+A_5+A_6+A_7$，由循环结构当型循环结构可知 $i<8$.

18、解：把 3 只黄色乒乓球标记为 A、B、C，3 只白色的乒乓球标记为 1、2、3.

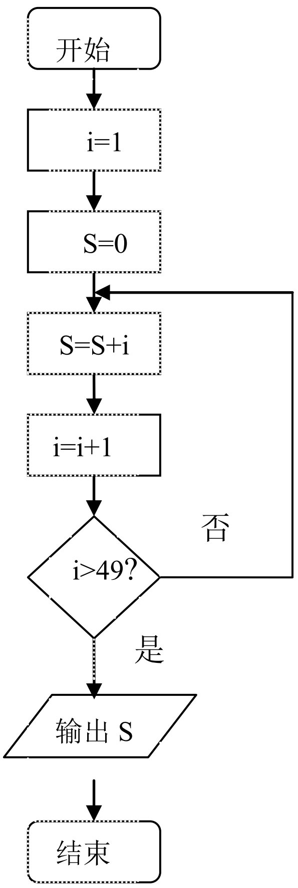
从 6 个球中随机摸出 3 个的基本事件为：ABC、AB1、AB2、AB3、AC1、AC2、AC3、A12、A13、A23、BC1、BC2、BC3、B12、B13、B23、C12、C13、C23、123，共 20 个

（1） 事件 E={摸出的 3 个球为白球}，事件 E 包含的基本事件有 1 个，即摸出 123 号 3 个球，P（E）=1/20=0.05

（2） 事件 F={摸出的 3 个球为 2 个黄球 1 个白球}，事件 F 包含的基本事件有 9 个，P（F）=9/20=0.45

（3） 事件 G={摸出的 3 个球为同一颜色}={摸出的 3 个球为白球或摸出的 3 个球为黄球}，P（G）=2/20=0.1，假定一天中有 100 人次摸奖，由摸出的 3 个球为同一颜色的概率可估计事件 G 发生有 10 次，不发生 90 次.则一天可赚 $90\times1-10\times5=40$，每月可赚 1200 元.

19



20. 解：（1）i < = 50　　（2）p= p + i

程序：

```
i=1
p=1
s=0
WHILE i<=50
  s= s + p
  p= p + i
  i=i+1
WEND
PRINT  s
END
```

数学 4：

第一章　三角函数

A 级　1-4 BBCC　5、二、$-2\sqrt{3}$；　6、$-\dfrac{4}{3}$；

7．提示：将函数 $y=\sin x, x\in\left[0,2\pi\right]$ 的图象放大 2 倍再向上平移一个单位即可.

8．解：原式 $=\dfrac{\sin(180^0-x)}{\tan(-x)}\cdot\dfrac{1}{\tan(90^0-x)\tan(90^0-x)}\cdot\dfrac{\cos x}{\sin(-x)}$

$=\dfrac{\sin x}{-\tan x}\cdot\tan x\cdot\tan x(-\dfrac{1}{\tan x})=\sin x$

B 级 9．B　10．　4π，　$[-4\ 4$.提示：2a+1=3, a=1，$T=\dfrac{2\pi}{\frac{|a|}{2}}=4\pi, y=-4\sin\dfrac{1}{2}x, \therefore -4\le y\le 4$

11．17.3　提示：　$\dfrac{h}{30}=\tan 30^0, h=10\sqrt{3}$

12．解：$\because f(\dfrac{1}{3})=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}, f(\dfrac{4}{3})=f(\dfrac{1}{3})-1=-\dfrac{1}{2}$　　　$\therefore f(\dfrac{1}{3})+f(\dfrac{4}{3})=0$

13．解：设扇形的半径为 r，则 $S=\dfrac{1}{2}(20-2r)r=-r^2+10r$

当 $r=5$ 时，S 取最大值，此时 $l=10, |\alpha|=\dfrac{l}{r}=2$

C 级 14. B　提示：由 T=2（3-1）=4，得 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{\pi}{4}$，将（1，1）代入得 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

15．解：从表可以看出，当 t＝0 时，y＝10，且函数的最小正周期 $T=12$　∴b＝10，$\dfrac{2\pi}{\omega}=12$ ∴ $\omega=\dfrac{\pi}{6}$，又 $t=3$ 时 $y=13$ 得 $A\sin\dfrac{\pi}{2}+10=13$ ∴ $A=3$，∴ $y=f(t)$ 的近似表达式为 $y=3\sin\dfrac{\pi}{6}t+10$，

第二章　平面向量

A 级 1-4BDAC　5、-5；　6、圆　　以共同的始点为圆心，以单位1为半径的圆；

7．解：　连结 AC，$\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，　$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}$，

$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{a}=\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{a}$，　$\because \overrightarrow{NM}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{b}-\dfrac{1}{4}\vec{a}$，

$\therefore \overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{NM}=\dfrac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}$.

8 解：(1) $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)^2=7, \therefore 9\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}=7$, 而 $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$,

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}, \therefore \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{1}{2}$，　　故 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)^2=9\left|\vec{a}\right|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=9+3+1=13, \left|3\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{13}$

B 级 9.C　10、C　　提示：$\because \begin{cases} -10+4\times5=10 \\ 10+(-3)\times5=-5 \end{cases}$ 故 5 秒后 P 的坐标为(10,-5).　　11.(4,-2)；

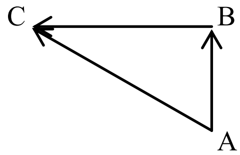
12．解：(1) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1+3t,2+3t)$,若 P 在 x 轴上,则 2+3t=0,$\therefore t=-\frac{2}{3}$;

若 P 在 y 轴上,只需 1+3t=0,$\therefore t=-\frac{1}{3}$；　若 P 在第二象限,则$\begin{cases} 1+3t<0 \\ 2+3t>0 \end{cases}\therefore -\frac{2}{3}<t<-\frac{1}{3}$.

（2）因为$\overrightarrow{OA}=(1,2),\overrightarrow{PB}=(3-3t,3-3t)$, 若 OABP 为平行四边形,则$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PB}$

$\because \begin{cases} 3-3t=1 \\ 3-3t=2 \end{cases}$无解,所以四边形 OABP 不能成为平行四边形.

13．解：如图，设 $\overrightarrow{AB}$ 表示船垂直于对岸的速度，$\overrightarrow{BC}$ 表示水流的速度，



则由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AC}$ 就是渔船实际航行的速度，

航行的时间为$4\div2=2(h)$,

在 $Rt\Delta ABC$ 中，$|AB|=2km/h,|AC|=8\div2=4km/h$，　　$\therefore|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{3}km/h$

答：河水的流速为$2\sqrt{3}km/h$.

C 级　14．A．　分析：$\because k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+k_3\overrightarrow{a_3}=\vec{0}$ 得 $\begin{cases} k_1+k_2+2k_3=0 \\ -k_2+3k_3=0 \end{cases}$　代入验证得 A

15．解：由题意可得 $|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0$，故有 $\vec{a}\perp\vec{b}$，由 $\vec{x}\perp\vec{y}$ 知：

$\left[\vec{a}+(t^2-3)\vec{b}\right]\cdot(-k\vec{a}+t\vec{b})=0$，即$-k\vec{a}^2+(t^3-3t)\vec{b}^2+(t-t^2k+3k)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore -k\cdot2^2+(t^3-3t)\cdot1^2+(t-t^2k+3k)\cdot0=0$

$\therefore$可得 $k=\frac{t^3-3t}{4}$，故 $\frac{k+t^2}{t}=\frac{1}{4}(t^2+4t-3)=\frac{1}{4}(t+2)^2-\frac{7}{4}$

即当 t=-2 时，$\frac{k+t^2}{t}$ 有最小值为$-\frac{7}{4}$

第三章　三角恒等变换

A 级　1-4 DBDB　5、$\cos\alpha$；　6、$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

7．证明：$\because$ 左边 $=\dfrac{\cos^2\theta}{\cot\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\theta}{2}}=\dfrac{\cos^2\theta}{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}-\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}=\dfrac{\cos^2\theta}{\dfrac{\cos\theta}{\frac{1}{2}\sin\theta}}$

$=\dfrac{1}{2}\cos^2\theta\bullet\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}\sin 2\theta=$ 右边，$\therefore$ 原式得证．

8．解：由 $\tan 2\alpha=\dfrac{1}{3}$ 得 $\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{3}$．这是一个关于 $\tan\alpha$ 的方程，解此方程可求得 $\tan\alpha=-3\pm\sqrt{10}$．

B 级　9．B　10、C　　11、$\sqrt{3}$

12．解：$\because(\dfrac{\pi}{4}-x)+(\dfrac{\pi}{4}+x)=\dfrac{\pi}{2},\therefore\cos(\dfrac{\pi}{4}+x)=\sin(\dfrac{\pi}{4}-x)=\dfrac{5}{13}$，

而 $\cos 2x=\sin(\dfrac{\pi}{2}-2x)=\sin 2(\dfrac{\pi}{4}-x)=2\sin(\dfrac{\pi}{4}-x)\cos(\dfrac{\pi}{4}-x)=\dfrac{120}{169}$

$\therefore\dfrac{\cos 2x}{\cos(\frac{\pi}{4}+x)}=\dfrac{\frac{120}{169}}{\frac{5}{13}}=\dfrac{12}{13}$．

13．解法一：由 $\begin{cases}\sin A+\cos A=\dfrac{7}{13}\\ \sin^2A+\cos^2A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin A=\dfrac{12}{13}\\ \cos A=-\dfrac{5}{13}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos A=\dfrac{12}{13}\\ \sin A=-\dfrac{5}{13}\end{cases}$

$\because A\in(0,\pi)$ 知 $\begin{cases}\cos A=\dfrac{12}{13}\\ \sin A=-\dfrac{5}{13}\end{cases}$ 舍去，故 $\dfrac{5\sin A+4\cos A}{15\sin A-7\cos A}=\dfrac{8}{43}$

解法二：由 $\sin A+\cos A=\dfrac{7}{13}$ ① 得 $(\sin A+\cos A)^2=\dfrac{49}{169}$，$\therefore 1+\sin 2A=\dfrac{49}{169}$

$\therefore\sin 2A=-\dfrac{120}{169}$，$\therefore(\sin A-\cos A)^2=1-\sin 2A=\dfrac{289}{169}$，$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore\sin A-\cos A>0$，

从而 $\sin A-\cos A=\dfrac{17}{13}$ ②，联立①、②解得 $\begin{cases}\sin A=\dfrac{12}{13}\\ \cos A=-\dfrac{5}{13}\end{cases}$　　故 $\dfrac{5\sin A+4\cos A}{15\sin A-7\cos A}=\dfrac{8}{43}$

C 级 14．D　　提示：$\because \cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$，$\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{5}$　$\therefore \sin\theta=-\frac{24}{25}$，$\cos\theta=-\frac{7}{25}$，则角 θ 的终边上一点为 P（$-\frac{7}{25}$，$-\frac{24}{25}$），它在直线 $24x-7y=0$ 上.

15．解：(1) $f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)$，$\because T=\pi$，$\therefore \omega=2$，又 $\because f(x)$ 的最大值

$\because f(\frac{\pi}{12})=4$，　$\therefore 4=\sqrt{a^2+b^2}$　①　，　且 $4=a\sin\frac{2\pi}{12}+b\cos\frac{2\pi}{12}$　②，

由 ①、②解出　a=2，　b=$2\sqrt{3}$.

(2) $f(x)=2\sin 2x+2\sqrt{3}\cos 2x=4\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，　　$\therefore f(\alpha)=f(\beta)=0$，

$\therefore 4\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})=4\sin(2\beta+\frac{\pi}{3})$，

$\therefore 2\alpha+\frac{\pi}{3}=2k\pi+2\beta+\frac{\pi}{3}$，　或　$2\alpha+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-(2\beta+\frac{\pi}{3})$，

即　$\alpha=k\pi+\beta$（α、β 共线，故舍去），　或　$\alpha+\beta=k\pi+\frac{\pi}{6}$，

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\tan(k\pi+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$　$(k\in Z)$.

数学 4 模块检测卷

一、选择题　1-5　CBCBA　6-10　BBCDC

二、填空题　11、$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　12、$\sqrt{3}$　　13、（3，4）　　14、$-\frac{1}{2}$　　15、4

三、解答题

16、解：$\because \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$　　$\therefore \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=4\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BC}=4(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=4\overrightarrow{AC}$　，　　$\therefore \overrightarrow{AC}\parallel\overrightarrow{AE}$，即 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 共线

17、解：设 $\vec{a}$ 的起点为 A(x,y)，则由 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(1-x,0-y)$ 得 $\begin{cases}1-x=-7\\0-y=10\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x=8\\y=-10\end{cases}$，$\therefore \vec{a}$ 的起点坐标为 A(8,-10)

18、解：（1）$\because \sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$　$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{4}$，即 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

（2）$\because \theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$　　$\therefore \sin\theta>0,\cos\theta<0$，即 $\sin\theta-\cos\theta>0$　$\therefore$

$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}$　$=\sqrt{1-2\times(-\frac{3}{8})}=\sqrt{1+\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

19、解：$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$， $\sin\alpha=\dfrac{4}{5},\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{13}$

$\therefore 0<\alpha+\beta<\pi \quad \therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}=\dfrac{3}{5}$，

$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\dfrac{25}{169}}=\dfrac{12}{13}$，

$\therefore \sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\dfrac{12}{13}\times\dfrac{3}{5}-\dfrac{5}{13}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{65}$

20、解：（1）$\because \overrightarrow{OA}=(2\cos^2 x,1)$， $\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{3}\sin 2x+a)$

$\therefore y=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x+a$

（ 2 ） 由 （ 1 ） 得 $y=2$ c^2 $ox\sqrt{s}$ 3: $=1$ $+c$ xo $\sqrt{s}+2$ x

$=2(\sin\dfrac{\pi}{6}\cos 2x+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin 2x)+a+1=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+a+1$.

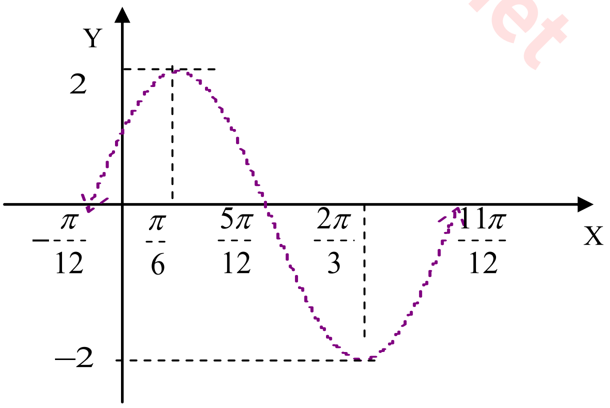
当$\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})=1$时， $y_{\max}=2+a+1=3+a$. 又$\because y_{\max}=2$

$\therefore 3+a=2$ ， $\therefore a=-1$

（3）由（2）得， $y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$ ，列表如下：

$2x+\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x	$-\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{5\pi}{12}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{11\pi}{12}$
$y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})$	0	2	0	-2	0

作出图象如下：



增区间是：$[-\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\dfrac{\pi}{6}+k\pi](k\in Z)$，减区间是：$[\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{2\pi}{3}+k\pi](k\in Z)$.

数学 5

第一章　解三角形

A 级　1-4 BBCB；5 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$；6 $2\sqrt{13}$；7. 解：A=180^0-（B+C）=75^0，

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin(45^0+30^0)}=\frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=5(3\sqrt{2}-\sqrt{6}),$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=10(\sqrt{3}-1)$$

8 解：由 cosA=$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{7}\approx-0.1429$ 得 A≈98^0，由 cosB=$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，得 B=60^0

所以 C=180^0-（A+B）≈180^0-（98^0+60^0）=22^0

B 级 9. B；　10. C；　11. 60^0；

12、解：由已知及正弦定理可得（2RsinA）^{2} • $\frac{\sin B}{\cos B}=(2R\sin B)^2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}$，即 sin2A=sin2B，

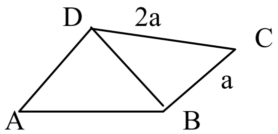
所以 2A=2B 或 2A=π -2B，即 A=B 或 A+B=$\frac{\pi}{2}$，所以△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

13、解：设 A、B、C、D 的度数依次为 3x、7x、4x、10x，
因为 3x+7x+4x+10x=360^0，所以 x=15^0，所以 A=45^0，
B=105^0，C=60^0，D=150^0，连接 BD，在△BCD 中，

由余弦定理得，BD=$\sqrt{3}a$，此时，DC^2=BD^2+BC^2，

则∠DBC=90^0，所以∠CDB=30^0，∠ADB=120^0，

在△ABD 中，由正弦定理得 AB=$\frac{BD\cdot\sin\angle ADB}{\sin A}=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$



C 级 14、解:因为：a+b=5, ab=2，又 c^2=a^2+b^2-2abcos120^0=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab=23，所以 c=$\sqrt{23}$.

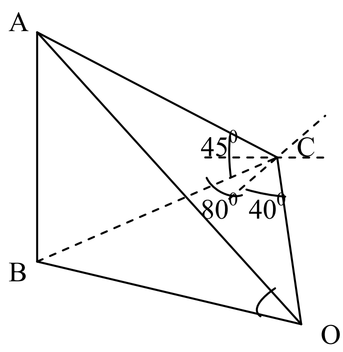
15、解：设塔高 AB=x，因为 AB⊥平面 BCO，∠ACB=45^0，所以 BC=x，

在 Rt△ABO 中，BO=$\frac{AB}{\tan 30^0}=\sqrt{3}x$，在△BCO 中，由余弦定理

得 BO^2=CB^2+CO^2-2CB • COcos120^0，所以 $(\sqrt{3}x)^2=x^2+100+10x$，

解得 x=10 或=-5（舍去）. 所以塔高为 10 米.

答：塔高为 10 米.



第二章 数列

A 级 1-4 CABC； 5、6；6、±4；

7、解：因为 $a_1=1, a_3+a_5=14$，所以（a_1+2d）+(a_1+4d)=14，所以 d=2

因为：$s_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，所以 n=10.

8、解：因为 $s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，所以 n=27.因为 $a_n=a_1+$（n-1）d，所以 $d=\frac{17}{3}$.

B 级 9、C；10、A；11、$3\sqrt{2}$；

12、解：设三个数为 a-d，a，a+d，由 $\begin{cases} a-d+a+a+d=18 \\ (a-d)^2+a^2+(a+d)^2=116 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a=6 \\ d=\pm 2 \end{cases}$，所以三数为 4，6，8 或 8，6，4.

13、解：设公比为 q，则 q≠1，由 $\begin{cases} a_1q5-a_1q^3=216 \\ a_1q^2-a_1=8 \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=13 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} q=3 \\ a_1=1 \\ n=3 \end{cases}$

C 级 14、解：因为 $\lg a_n=2\lg 2-(n-4)\lg 3$，$\lg a_1=2\lg 2+3\lg 3>0$

公差 $-\lg 3<0$，由 $\begin{cases} \lg a_n \ge 0 \\ \lg a_{n+1} \le 0 \end{cases}$ 得 $3+\log_3 4 \le n \le 4+\log_3 4$，所以 n=5.

15、解：(1)当 a=1 时，$s_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

(2)当 a≠1 时，$s_n=1+3a+5a^2+\cdots+(2n-1)a^{n-1}$ ① $as_n=a+3a^2+\cdots+(2n-3)a^{n-1}+2^{n-1}a^n$ ②

①-②得（1-a）$s_n=1+2a+2a^2+\cdots 2a^{n-1}-(2n-1)a^n$

$$=1+2\cdot\frac{a(1-a^{n-1})}{1-a}-(2n-1)a^n=\frac{1+a-(2n+1)a^n+(2n-1)a^{n+1}}{1-a}$$

所以 $s_n=\frac{1+a-(2n+1)a^n+(2n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2}$

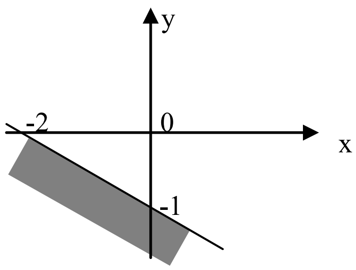
综上 $s_n=\begin{cases} n^2\,(a=1) \\ \frac{1+a-(2n+1)a^n+(2n-1)a^{n+1}}{(1-a)^2}(a\neq 1) \end{cases}$

第三章 不等式

A 级 1-4CBCD； 5、A＜B；6、4；

7 解：因为 $-x^2+5x-6\geqslant 0$，所以 $x^2-5+6\leqslant 0$，所以 $2\leqslant x\leqslant 3$，所以不等式的解集为{x|2≤x≤3}

8、解：



B 级 9、B； 10、C； 11、b＜a;

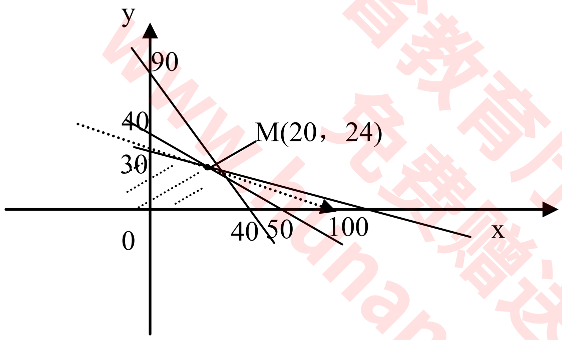
12、解：因为 $(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a})-(a+b)=\frac{a^2-b^2}{b}+\frac{b^2-a^2}{a}=(a^2-b^2)(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})$

$=\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}$ 又因为 a＞0，b＞0，a≠b，所以

$\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}$＞0，所以 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$＞a+ b

13、解：设该厂生产产品 A、B 分别为 xkg、ykg，所创造的经济价值为 z 万元.

则 $\begin{cases}9x+4y\le 360\\4x+5y\le 200\\3x+10y\le 300\\x\ge 0, y\ge 0\end{cases}$ z=7x+12y ， 画出可行域



由 $\begin{cases}4x+5y=200\\3x+10y=300\end{cases}$ 得 M（20，24），当直线 $y=-\frac{7}{12}x+\frac{z}{12}$ 经过 M 时，Zmax=428

答：生产 A20kg，B24kg 才能创造最高经济价值 428 万元

C 级

14、B.解：因为 a＞b＞1，所以 lga＞lgb＞0，所以 $\frac{\lg a+\lg b}{2}>\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，即 Q＞P，又 $\frac{a+b}{2}$ $>\sqrt{ab}$，所以 $\lg\frac{a+b}{2}>\lg\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，即 R＞Q，所以 R＞Q＞P，选 B.

15、解：因为 x＞-1，所以 x+1＞0，x+2＞0，x+5＞0

$$y=\frac{(x+5)(x+2)}{x+1}=\frac{x^2+7x+10}{x+1}=\frac{(x+1)^2+5(x+1)+4}{x+1}$$

$$=x+1+\frac{4}{x+1}+5\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}+5=9$$

当且仅当 x+1=$\frac{4}{x+1}$，即 x=1 时，等号成立.所以当 x=1 时，y_{min}=9.

数学 5 测试卷

1—5 BCDCA　6—10 BCDBC

11、1　12、2　13、-14　14、$\dfrac{(n+1)n}{2}+1-\dfrac{1}{2^n}$　15、24

16、解：由 a_1 和 a_3 是方程 $x^2-8x+7=0$ 的两个根可得

$a_1=1$ ，$a_3=7$ 或 $a_1=7$ ，$a_3=1$ （1）若 $a_1=1$ ，$a_3=7$， 则 $q=\sqrt{7}$，$a_n=7^{\frac{n-1}{2}}$

（2）若 $a_1=7$， $a_3=1$， 则 $q=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，$a_n=7^{\frac{3-n}{2}}$，

所以，所求的通项公式为：$a_n=7^{\frac{n-1}{2}}$ 或 $a_n=7^{\frac{3-n}{2}}$.

17 解：（1）由已知得：$\tan A=\tan(180^0-B-C)=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1\times 3}{4\times 5}}$

$=-1$，所以 $A=135^0$

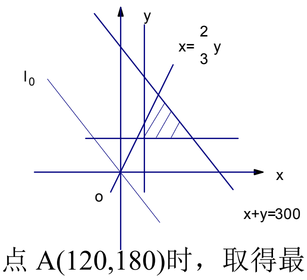
（2）最小的边长为∠B 所对的边，设为 b，由 $\tan B=\dfrac{1}{4}$ 可得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{17}}{17}$，由正弦定理可得：

$$b=\sin B\cdot\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$$

18 解：　$M=\{x\mid x^2+3x-18>0\}=\{x\mid x>3$ 或 $x<-6\}$，$N=\{x\mid (x-k)(x-k-1)\leqslant 0\}=\{x\mid k\leqslant x\leqslant k+1\}$
由 $M\cap N\neq\Phi$ 可知：$k+1>3$　或　$k<-6$　　即　　$k>2$　　或　　$k<-6$，
故 k 的取值范围为：$k>2$ 或 $k<-6$

19、解：设利润为 z 万元，对 A 投资 x 万元，对 B 投资 y 万元.
则有 $z=0.4x+0.6y$

$$\begin{cases} x\geqslant \dfrac{2}{3}y \\ x\geqslant 25 \\ y\geqslant 25 \\ x+y\leqslant 300 \end{cases}$$



作出可行域，如图所示，平移直线 l_0:$y=-\dfrac{2}{3}x$，知 l 过点 A(120,180)时，取得最大值.

且最大值 $z_{max}=0.4\times 120+0.6\times 180=156$ 万元.

答：该公司在这两个项目上共可获得的最大利润是 156 万元.

20、解：设用 t 小时，甲船能追上乙船，且在 C 处相遇.

在△ABC 中，AC=28t，BC=20t，AB=9， 设∠ABC=α，∠BAC=β.

∴α=180°－45°－15°=120°.根据余弦定理 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\alpha$，

$\left(28t\right)^2=81+\left(20t\right)^2-2\times9\times20t\times(-\frac{1}{2})$，$128t^2-60t-27=0$，(4t−3)(32t+9)=0，解得 t=$\frac{3}{4}$，t=-$\frac{9}{32}$（舍）∴AC=28×$\frac{3}{4}$=21 n mile，BC=20×$\frac{3}{4}$=15 n mile.

根据正弦定理，得 $\sin\beta=\frac{BC\sin\alpha}{AC}=\frac{15\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{21}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$ ≈0.6186.

又∵α=120°，∴β 为锐角，β≈38°. ∴甲船沿南偏东约 7°的方向用 $\frac{3}{4}$ h 可以追上乙船.

学业水平考试检测卷（一）

1—5 CACDA　6—10 DBDBC

11、4 12、x+y-1=0 13、2 14、$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　15、3x+6y-2=0

16、解：y=cos2x+sin2x

$=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x)=\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{4}\sin 2x)$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

最小正周期是 π，当 x=$k\pi+\frac{\pi}{8}$　$,k\in Z,$有最大值$y=\sqrt{2}$

17、证：(1) 连接 AC 交 BD 与 O,连接 EO,

∵E、O 分别为 PA、AC 的中点

∴E0∥PC　∵PC⊄平面 EBD,EO⊂平面 EBD

∴PC∥平面 EBD

(2) ∵PD⊥平面 ABCD, PD⊂平面 PCD,

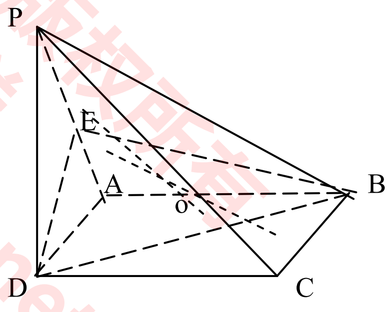
∴平面 PCD⊥平面 ABCD,

∵ABCD 为正方形 ∴ BC⊥CD,

∵平面 PCD∩平面 ABCD=CD, BC⊂平面 ABCD

∴BC⊥平面 PCD

又∵BC⊂平面 PBC，∴平面 PBC⊥平面 PCD.



18、解：(1) 原式=$\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$ — 1=$\frac{\sqrt{2}}{4}-1$；

(2) 原式= $\sin\frac{5\pi}{3}\cos\theta$ — $\frac{1}{2}\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$—$\frac{1}{2}\sin\theta$= —sin（$\theta$+$60^0$）= —$\frac{\sqrt{2}}{2}$

又因为θ为锐角，所以θ=75^0

19、解：(1) 在等比数列$\{a_n\}$中，由已知可得：

$\begin{cases}a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2=27\\a_1q+a_1q^3=30\end{cases}$　解得：$\begin{cases}a_1=1\\q=3\end{cases}$ 或$\begin{cases}a_1=-1\\q=-3\end{cases}$

（2） $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $\quad\therefore$ 当$\begin{cases}a_1=1\\ q=3\end{cases}$时， $S_6=\dfrac{1\times(1-3^6)}{1-3}=\dfrac{1-3^6}{-2}=364$

当$\begin{cases}a_1=-1\\ q=-3\end{cases}$时， $S_6=\dfrac{(-1)\times[1-(-3)^6]}{1+3}=\dfrac{3^6-1}{4}=182$

20、解：(1)、要证明函数$f(x)$的图象关于y轴对称，只须证明函数$f(x)$是偶函数

∵$x\in$R， 由$f(-x)=a^{-x}+a^{x}=a^{x}+a^{-x}=f(x)$

∴函数$f(x)$是偶函数，即函数$f(x)$的图象关于y轴对称

（2）、证明：任取$x_1,x_2\in(0,+\infty)$且$x_1<x_2$，因为

$$f(x_1)-f(x_2)==a^{x_1}+a^{-x_1}-(a^{x_2}+a^{-x_2})=(a^{x_1}-a^{x_2})+(\frac{1}{a^{x_1}}-\frac{1}{a^{x_2}})=\frac{(a^{x_1}-a^{x_2})(a^{x_1+x_2}-1)}{a^{x_1+x_2}}$$

（1）当a>1 时，

由 0<$x_1<x_2$，则 x_1+x_2>0，则$a^{x_1}>0$、$a^{x_2}>0$、$a^{x_1}<a^{x_2}$、$a^{x_1+x_2}>1$；

$f(x_1)-f(x_2)$<0 即$f(x_1)<f(x_2)$；

（2）当 0<a<1 时，

由 0<$x_1<x_2$，则 x_1+x_2>0，则$a^{x_1}>0$、$a^{x_2}>0$、$a^{x_1}>a^{x_2}$、$0<a^{x_1+x_2}<1$；

$f(x_1)-f(x_2)$<0 即$f(x_1)<f(x_2)$；

所以，对于任意 a（$a>0$且$a\neq1$），$f(x)$在$(0,+\infty)$上都为增函数.

（3）、由（2）知$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，则当$x\in$［1，2］时，函数$f(x)$亦为增函数；

由于函数$f(x)$的最大值为$\frac{5}{2}$，则$f(2)=\frac{5}{2}$

即$a^2+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{2}$，解得$a=\sqrt{2}$，或$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

学业水平考试检测卷（二）

1—5 BDCAA 6—10 BCACD

11、$\dfrac{1}{3}$ 12、y=$x^{\frac{1}{2}}$ 13、b$//\alpha$或b$\subset\alpha$ 14、{x｜-5<x<3} 15、①③⑤

16、解：设所求直线l的方程为 x-y+m=0 或 y=kx

把点 A（3，2）代入上述方程得：m=-1 或 k=$\dfrac{2}{3}$

故所求直线l的方程为 x-y-1=0 或 2x-3y=0

17、解：⑴不可能事件，概率为 0. ⑵随机事件，概率为$\dfrac{4}{9}$.

⑶必然事件，概率为 1.

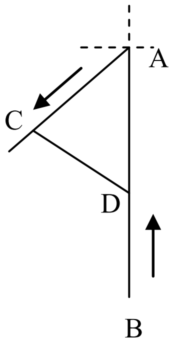
18、解：设经过x小时后,甲船和乙船分别到达C,D两点

则$AC=8x, AD=AB-BD=20-10x$

$\therefore CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos 60^\circ$

$=(8x)^2+(20-10x)^2-2\cdot 8x\cdot(20-10x)\cdot\frac{1}{2}$

$=244x^2-560x+400=244(x-\frac{70}{61})^2+\frac{4800}{61}$



$\because$ 当CD^2取得最小值时,CD取得最小值.

$\therefore$ 当$x=\frac{70}{61}$时,CD取得最小值,

此时,甲、乙两船相距最近

答：经过$\frac{70}{61}$小时后，甲、乙两船相距最近.

19、答案：$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$　　$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$　　$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

20、解：设圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

∵圆上的点 A(2, 3) 关于直线 $x+2y=0$ 的对称点仍在圆上,

∴圆心在 $x+2y=0$ 上.

∴$a+2b=0$.　　①

∵圆被直线截得的弦长为$2\sqrt{2}$,

∴$(\frac{|a-b+1|}{\sqrt{2}})^2+(\sqrt{2})^2=r^2$.　　②

由点 A(2, 3) 在圆上,得$(2-a)^2+(3-b)^2=r^2$.　　③

联立①②③,解得$\begin{cases}a=6,\\ b=-3,\\ r^2=52\end{cases}$或$\begin{cases}a=14,\\ b=-7,\\ r^2=244.\end{cases}$

圆的方程为$(x-6)^2+(y+3)^2=52$ 或$(x-14)^2+(y+7)^2=244$.